

Prof. dr hab. inż. Mieczysław Kuczma  
Instytut Konstrukcji Budowlanych  
Politechnika Poznańska  
ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań

Poznań, 10.06.2019r.

e-mail: mieczyslaw.kuczma@put.poznan.pl

**Recenzja rozprawy doktorskiej**  
mgr inż. **Pauliny ŚWIĄTKIEWICZ**

pt.: **Equilibrium Finite Element Modelling Method in the  
Problem of the Thin Plate Bending**

**Podstawa opracowania:**

Powołanie na recenzenta przez Radę Wydziału Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Politechniki Łódzkiej; pismo Dziekana Wydziału Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Politechniki Łódzkiej – prof. dr. hab. inż. Marka Lefika, datowane z dnia 15.04.2019r.

**1. Przedmiot i ogólna charakterystyka pracy**

Praca doktorska mgr inż. Pauliny Świątkiewicz napisana jest w języku angielskim i zawiera streszczenie w j. polskim oraz w j. niemieckim. Przedmiotem pracy jest naprężeniowa wersja metody elementów skończonych w zastosowaniu do analizy statycznej cienkich płyt sprężystych, nazywanych płytą Kirchhoffa. Metoda elementów skończonych (MES) jest uniwersalnym sposobem aproksymacji nieskończone wymiarowych rozwiązań zagadnień brzegowych funkcjami skończone wymiarowymi o lokalnym nośniku, tzn. należącymi do podprzestrzeni ogólnej wektorowej przestrzeni funkcji, w której zadanie ma rozwiązanie. Metoda ta pozwala sprowadzić wyjściowe zagadnienie do zadania algebraicznego, np. w przypadku zagadnień liniowych – do liniowego układu równań algebraicznych. Należy jednak pamiętać, że rozwiązanie uzyskane za pomocą MES jest rozwiązaniem uogólnionym (słabym) danego problemu brzegowego, które tylko w przypadku wystarczającej gładkości operatorów



1

i danych definiujących problem jest równoważne jego rozwiązaniu klasycznemu (silnemu). Z uwagi na łatwiejsze ich wyznaczenie, tzw. funkcje kształtu MES zwykle stosowane do aproksymacji wybranej wielkości polowej wprowadzają (przemieszczenie) nieciągłości jej pól pochodnych na granicach elementów skończonych, co potęguje błąd aproksymacji tych wielkości, które są ważne z inżynierskiego punktu widzenia (np. naprężenia).

W zagadnieniach mechaniki ciał (konstrukcji) odkształcalnych, dominującym sformułowaniem MES jest ujęcie przemieszczeniowe, w który nieznanym, podstawowym i poszukiwanym rozwiązaniem jest pole przemieszczeń punktów ciała. Przemieszczeniowy model MES budowany jest na podstawie zasady minimum całkowitej energii potencjalnej układu, lub wywodzi się go bezpośrednio z równania pracy wirtualnej przy wirtualnym stanie przemieszczenia, które to stanowi pochodną wariacyjną (różniczkę) całkowitej energii potencjalnej układu. Jest to sformułowanie wygodne, m.in. także w przypadku płyt, jeśli chodzi o spełnienie warunków brzegowych, tj. sposobu podparcia i obciążenia płyty, bowiem warunki przemieszczeniowe (zasadnicze, stabilne) uwzględniane są bezpośrednio przez aproksymowane pole przemieszczeń, natomiast obciążenia brzegowe lub ich brak stanowią siłowe (naturalne, niestabilne) warunki brzegowe zagadnienia brzegowego i wchodzi bezpośrednio jako wyrazy wolne algebraicznych równań równowagi dyskretnego modelu. Zwykle w przemieszczeniowym modelu MES płyty Kirchhoffa nie są zachowane warunki ciągłości pierwszych pochodnych pola przemieszczeń, co skutkuje nieciągłością odkształceń i naprężeń, a tym samym nieciągłością sił przekrojowych na granicy między elementami skończonymi. Odmiernym wariantem MES jest rozpatrywane w tej pracy sformułowanie równowagowe (naprężeniowe), w którym różniczkowe równania równowagi wyrażone w uogólnionych naprężeniach są bezpośrednio aproksymowane i warunki na brzegu między elementami musi spełniać niewiadome pole naprężeń lub związane z nim wielkości wypadkowe (momenty zginające i skręcające) albo, jak w tej pracy, wielkości zastępcze w postaci funkcji naprężeń Southwella. Także ten sposób dyskretyzacji nie jest jednak wolny od niedogodności. Jednym z głównych mankamentów podejścia naprężeniowego MES jest problem wyznaczenia przemieszczeń na podstawie bezpośrednio wyznaczonych w tym podejściu naprężeń (momentów zginających i skręcających). Należy dodać, że w terminach energii, podejście naprężeniowe MES odpowiada minimalizacji energii komplementarnej układu. Oba sformułowania MES – przemieszczeniowe i naprężeniowe – są w sensie energetycznym wzajemnie dopełniające (dualne), dając oszacowania dolne i górne rozwiązania dokładnego, co jest niezmiernie ważne w przypadku rozwiązań przybliżonych.





Tematyka badawcza ocenianej pracy jest ważna z praktycznego punktu widzenia. Jest to jednak zagadnienie bardzo złożone od strony matematycznej i dlatego ciągle jeszcze aktualne jako temat badawczy, chociaż modelowanie płyt za pomocą MES nie jest problemem nowym, bo stanowi przedmiot badań już od lat 60-tych poprzedniego wieku, gdy dostępne stały się komputery i następował rozwój i aplikacja koncepcji aproksymacji MES do różnych typów konstrukcji. Doktorantka przedstawiła w pracy model obliczeniowy płyty Kirchhoffa w ujęciu naprężeniowym MES i przeprowadziła jego weryfikację numeryczną poprzez porównanie uzyskanych wyników dla wielu charakterystycznych przykładów z wynikami obliczeń za pomocą dostosowanych przemieszczeniowych elementów skończonych. Autorka przeprowadza rzetelne porównanie uzyskanych wyników, wskazując na zalety i wady obu rozpatrywanych sformułowań MES. Badania Doktorantki są wartościowym przyczynkiem w budowie modeli MES dla płyty Kirchhoffa. Przedstawiony w pracy naprężeniowy model MES jest uogólnieniem znanych modeli obliczeniowych i cechuje się szerszym zakresem zastosowań co do działających obciążeń i warunków brzegowych oraz kształtu obszaru płyty.

Rozprawa liczy 154 strony i składa się z 7 numerowanych rozdziałów oraz części nienumerowanych: streszczeń w j. angielskim, polskim i niemieckim (Abstract, Streszczenie, Zusammenfassung), wykazu oznaczeń (Notations), spisu rysunków (List of Figures), spisu tabel (List of Tables), wykazu bibliografii (Bibliography) zawierającego 174 pozycji, i jednego załącznika. Część główną pracy stanowią rozdziały 3 do 6 (str. 43 – 117), gdzie Doktorantka zawarła propozycję naprężeniowego modelu MES i wyniki własnych obliczeń numerycznych.

Rozprawa napisana jest zwięźle i bardzo komunikatywnie. Układ rozprawy jest klarowny i logicznie poprawny, redakcja pracy staranna (recenzent zauważył tylko nieliczne pomyłki językowe lub edytorskie). Lektura pracy doktorskiej, będącej dla recenzenta interesującym ujęciem zagadnienia i poznawczą przyjemnością, wskazuje na dobre przygotowanie Doktorantki do prowadzenia badań naukowych na wysokim poziomie w nawiązaniu do aktualnego stanu wiedzy, z wykorzystaniem zaawansowanego aparatu matematycznego i nowoczesnych koncepcji mechaniki obliczeniowej.

## **2. Opis i ocena rozprawy**

W rozdziale 1., zatytułowanym *Introduction*, Autorka przedstawia przedmiot i cel pracy jako teoretyczne sformułowanie naprężeniowego modelu metody elementów skończonych dla



3

płyty Kirchhoffa i numeryczna weryfikacja poprawności i efektywności zaproponowanego modelu, jak również:

- dostosowanie modelu MES do różnych warunków brzegowych, poprzez wzbogacenie elementów skończonych o wielopunktowe więzy w postaci mnożników Lagrange'a.
- oszacowanie względnego błędu rozwiązania przybliżonego na podstawie dwóch rozwiązań – kinematycznie dopuszczalnego i statycznie dopuszczalnego.
- obliczenie ugięć płyty na podstawie momentów zginających i skręcających będących rozwiązaniem opracowanego naprężeniowego (równowagowego) modelu MES.

Rozdział drugi – *Literature review*, zawiera przegląd stanu wiedzy w dziedzinie tematu rozprawy, sięgający do XVIII-wiecznych początków liniowej teorii płyt, poprzez metody rozwiązań analitycznych, jednak z naciskiem położonym na sformułowania modeli obliczeniowych za pomocą metody elementów skończonych. Autorka omawia sformułowania przemieszczeniowe, naprężeniowe, mieszane i hybrydowe MES, zwracając uwagę na ich zalety i mankamenty, a szczególnie na sposób spełniania warunków brzegowych i warunków ciągłości na granicach łączących elementy skończone.

W rozdziale trzecim – *Plate bending by equilibrium finite element method*, pierwszym z głównych rozdziałów pracy, Doktorantka przedstawia relacje definiujące proponowany model naprężeniowy MES do analizy zginania płyty Kirchhoffa. Model bazuje głównie na wcześniejszych pracach takich autorów Elias (1968) i Morley (1967,1968) oraz nawiązuje do pomysłu Fraeijs de Vuebeke (1965), i stanowi uogólnienie podanych tam idei. Praca obejmuje także praktyczną implementację modelu w ramach programu MES o nazwie FENAP (Finite Element Non-linear Analysis Program) napisanego w języku Fortran. Ważnym składnikiem modelu są dwie funkcje naprężeniowe Southwella, oznaczane w pracy przez  $U$  i  $V$  (lub jako składowe wektora  $\mathbf{U} = [U_1=U, U_2=V]$ ), których użycie zapewnia uzyskanie statycznie dopuszczalnych pól naprężeń, oraz pewna funkcja  $M_0$  będąca dodatkową niewiadomą zadania. Doktorantka aproksymowała funkcje  $U$  i  $V$  elementami trójkątnymi klasy  $C^0$  o liniowych i kwadratowych funkcjach kształtu, czyniąc tym samym wartości węzłowe tych funkcji stopniami swobody konstrukcji, których wartości otrzymujemy poprzez rozwiązanie układu równań liniowych. Funkcja  $M_0$  ma spełniać równanie różniczkowe Poissona (3.26), jak również pewne warunki brzegowe, i w prostych przypadkach udaje się ją podać w postaci analitycznej, natomiast w ogólnym przypadku trzeba ją wyznaczyć jako rozwiązanie przybliżone równania (3.26), np. za pomocą MES. Wiele uwagi Autorka poświęca spełnieniu



przez naprężeniowy model MES warunków równowagi na brzegu płyty. Rozpatrzyła trzy warianty trójkątnego elementu skończonego: 3-węzłowy element trójkąty o liniowych funkcjach kształtu i 6 stopniach swobody, 6-węzłowy element trójkąty o kwadratowych funkcjach kształtu i 12 stopniach swobody, oraz 6-węzłowy element trójkąty o kwadratowych funkcjach kształtu i dodatkowo 3 mnożnikach Lagrange'a w wierzchołkach co daje w sumie 15 stopni swobody. Mnożniki Lagrange'a są potrzebne, aby zapewnić równowagę sił prostopadłych do płaszczyzny płyty na jej brzegu. Aby zapewnić spełnienie naprężeniowych brzegowych warunków równowagi na moment zginający  $M_n$  i zastępczą siłę poprzeczną  $Q_{eff}$ . Autorka proponuje 3 typy elementów skończonych z wielopunktowymi więzami odpowiednio dopasowane do powyższych trzech wariantów trójkątnego elementu skończonego.

W rozdziale czwartym – *Displacement field by the least squares method*, Doktorantka przedstawia algorytm numerycznego wyznaczania pola przemieszczeń ze znanych krzywizn płyty metodą najmniejszych kwadratów. Z kolei, w zastosowanym podejściu naprężeniowym MES krzywizny oblicza się ze związków konstytutywnych dla sprężystej płyty Kirchhoffa na podstawie wcześniej wyznaczonych momentów zginających i skręcających płytę. Tutaj do dyskretyzacji płyty użyto dostosowany, prostokątny 4-węzłowy element Bognera-Foxa-Schmita o 16 stopniach swobody.

Rozdział piąty – *Error estimation of approximate solution by Prager-Synge's method*, zawiera opis sposobu obliczania oszacowania *a posteriori* błędu aproksymacji rozwiązania dokładnego analizowanego problemu brzegowego. Podany sposób oparty jest na metodzie Pragera-Synge'a wyznaczającej ograniczenie górne i ograniczenie dolne błędu względnego, które to ograniczenia w normie energetycznej generowane są odpowiednio przez statycznie dopuszczalne i kinematycznie dopuszczalne rozwiązania danego zadania brzegowego.

Rozdział szósty – *Numerical examples*, najdłuższy rozdział pracy (str. 87-117), zawiera wyniki obliczeń numerycznych Doktorantki dla wielu przykładów zginania płyty Kirchhoffa. Rozpatrzone przykłady różnią się kształtem płaszczyzny środkowej płyty, warunkami podparcia, rodzajem działającego obciążenia lub budową przekroju poprzecznego (jedna z płyt była ortotropowa, pozostałe izotropowe). Doktorantka analizowała: (1) płytę kołową utwierdzoną na obwodzie i obciążoną równomiernie, (2) płytę kwadratową o dwóch równoległych bokach utwierdzonych i pozostałych dwóch przegubowo podpartych, obciążoną równomiernie, (3) płytę trapezową o jednej osi symetrii, utwierdzoną wzdłuż dłuższego boku i przegubowo podpartą punktowo w dwóch przeciwległych wierzchołkach, obciążoną



5

równomiernie, (4) ortotropową płytę prostokątną o wymiarach 9 m x 3 m przegubowo podpartą na obwodzie, wykonaną z falistej blachy stalowej o sinusoidalnym sfalowaniu, obciążoną równomiernie, (5) płyty obciążone siłami skupionymi: (a) kwadratową płytę obciążoną siłami skupionymi przyłożonymi w narożach, tworzącymi samorównowazący się układ sił wywołujący skręcanie płyty, (b) płytę prostokątną o wymiarach  $3l \times 2l$  przegubowo podpartą na obwodzie, obciążoną w środku siłą skupioną, (6) płytę trapezową o swobodnym najdłuższym boku i utwierdzoną na pozostałych trzech bokach, obciążoną równomiernie. W obliczeniach użyto 3-węzłowe i 6-węzłowe trójkątne elementy naprężeniowe opracowanego modelu MES, a do celów porównawczych – przemieszczeniowy trójkątny element HCT6 (Hsieh-Clough-Tocher), który jest elementem dostosowanym o finalnie 12 stopniach swobody. Element HCT6 jest zbudowany z trzech podtrójkątów o funkcjach kształtu będących pełnym wielomianem 3-go stopnia w każdym podtrójkącie, którego liczbę stopni swobody redukuje się z 30 do 12 za pomocą kondensacji statycznej. Doktorantka wykonała obliczenia dla trzech siatek o zmniejszającym się kolejno dwukrotnie wymiarze elementu. Warunki brzegowe wymuszono za pomocą mnożników Lagrange’a lub metodą funkcji kary (wprowadzając dodatkowy element o nieznaczącej sztywności). Pole przemieszczeń, na podstawie rozwiązania uzyskanego według zaproponowanego naprężeniowego elementu skończonego, wyznaczono za pomocą metody najmniejszych kwadratów (dokładniej: Moving Least Squares Method). Wyniki analiz numerycznych zostały dobrze zilustrowane bardzo licznymi wykresami i zestawieniami tabelarycznymi. Uzyskane wyniki potwierdzają poprawność sformułowania i komputerowej implementacji opracowanego naprężeniowego modelu MES i zastosowanych trójkątnych elementów skończonych, oraz wskazują na efektywność zaproponowanego podejścia do zagadnienia zginania płyt Kirchhoffa.

Rozdział siódmy – *Summary*, stanowi podsumowanie przeprowadzonych badań i osiągniętych wyników, oraz wskazuje problemy związane z rozpatrywanym zagadnieniem, które wymagają jeszcze dalszych badań.

W Załączniku A Doktorantka przedstawia sformułowanie i analizę zginania belki w ujęciu równowagowej metody elementów skończonych. Zastosowała liniową aproksymację momentów zginających i jako stopnie swobody, oprócz wartości momentów w węzłach siatki, użyła mnożników Lagrange’a, które można interpretować jako przemieszczenia poprzeczne belki. Rozważania teoretyczne uzupełnia przykładami numerycznymi, których wyniki zilustrowała na wykresach i kilka wybranych zestawiała w tabeli.



6



## Ocena merytoryczna i uwagi

Podsumowując, na podstawie szczegółowej lektury rozprawy i wyżej przedstawionego opisu jej treści i zakresu, mogę stwierdzić, że rozprawa napisana jest w sposób klarowny i spójny, a edycja pracy jest staranna (z użyciem edytora LaTeX). Naukowy przedmiot badań i postawione cele badawcze zostały jasno i precyzyjnie sformułowane. Przedstawione przez Doktorantkę sformułowanie zagadnienia zginania płyty Kirchhoffa w ujęciu równowagowej metody elementów skończonych jest poprawne i zawiera wiele oryginalnych elementów, szczególnie w odniesieniu do sposobu uwzględniania warunków brzegowych i wyznaczania oszacowania przedziału względnego błędu rozwiązania dokładnego poprzez obliczenie jego ograniczenia górnego i dolnego w sensie energetycznym. Na podkreślenie zasługuje również dokonanie komputerowej implementacji opracowanego modelu obliczeniowego, opartego na naprężeniowych trójkątnych elementach skończonych, jak również rozwiązanie licznych przykładów numerycznych. Otrzymane przez Doktorantkę wyniki wskazują na efektywność zaproponowanego naprężeniowego modelu MES do analizy zginania płyty Kirchhoffa i jego równoprawną, konkurencyjną pozycję w stosunku do przemieszczeniowego modelu MES. Tutaj, chciałbym też odnotować rzetelność z jaką Autorka przedstawiła zarówno zalety, jak i wymagania i mankamenty obu sformułowań MES – przemieszczeniowego i naprężeniowego – oraz ich komputerowej realizacji w odniesieniu do rozpatrywanego problemu.

Dokładna lektura tekstu rozprawy skłania też do przedstawienia kilku uwag, które wskazują na pewne pomyłki edycyjne lub aspekty, które wymagałyby dodatkowych wyjaśnień lub komentarza ze strony Doktorantki:

1. Brakuje formalnego, jawnego sformułowania tezy pracy.
2. Wzór (2.1) na str. 22 wymaga korekty.
3. Lepiej zapisywać zero po prawej stronie układu równań jako wielkość wektorową, np. w równaniu (4.27) na str.77 lub wzorze (6.4) na str. 89, czyli czcionką pogrubioną zgodnie ze systemem oznaczeń stosowanym w pracy.
4. Czy wprowadzenie mnożników Lagrange'a, jako dodatkowych stopni swobody płyty lub z powodu więzów wynikających z warunków brzegowych, ma zauważalny wpływ na uwarunkowanie końcowego układu równań algebraicznych  $\mathbf{K}\mathbf{a}=\mathbf{F}$  wynikającego z naprężeniowego modelu MES?
5. Recenzent zauważył niewłaściwe używanie przez Doktorantkę kilku wyrazów w j. angielskim, m.in.: (a) czasownika 'to receive', np. „...we receive the following



7

outcome...” (str. 47), „...we receive the following formulation...” (str. 47), gdzie Doktorantka używa czasownika ‘to receive’ w znaczeniu ‘to obtain’; czy (b) błędnej nazwy pojęcia technicznego „aerial moment of inertia” (str. 144, 152).

Chcę jednak wyraźnie zaznaczyć, że poczynione uwagi i zapytanie nie obniżają mojej wysokiej oceny pracy. Uważam, że Doktorantce udało się pomyślnie zrealizować trudne cele rozprawy, które sformułowała na początku pracy.

### **3. Wniosek końcowy**

Reasumując całość stwierdzam, że praca doktorska mgr inż. Pauliny Świątkiewicz stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego i potwierdza Jej dużą wiedzę w dziedzinie mechaniki konstrukcji i nowoczesnych metod obliczeniowych, spełnia tym samym wymóg art. 13 ust. 1 ustawy z dnia 14 marca 2003r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki. Złożoność i aktualność tematyki rozprawy, oryginalność rozwiązania postawionego problemu naukowego, oraz zakres i praktyczną użyteczność badań oceniam wysoko. Autorka pracy przedstawiła naprężeniowy model metody elementów skończonych do analizy konstrukcji płytowych i belkowych, i wykazała na wielu przykładach liczbowych, że zaproponowany model obliczeniowy jest poprawny i użyteczny w analizie zadań o znaczeniu praktycznym. Rozważania teoretyczne i zamieszczone wyniki analiz numerycznych dobrze ilustrują duże umiejętności i wiedzę Doktorantki w zakresie formułowania i numerycznego rozwiązywania założonych zagadnień brzegowych mechaniki konstrukcji.

**Stawiam wniosek o przyjęcie pracy i dopuszczenie mgr inż. Pauliny Świątkiewicz do publicznej obrony i ubiegania się o stopień naukowy doktora w dyscyplinie *Budownictwo*. Biorąc pod uwagę oryginalność podejścia do złożonego problemu naukowego i potwierdzoną skuteczność jego rozwiązania, wnioskuję o wyróżnienie tej pracy doktorskiej.**

  
prof. Mieczysław Kuczma

  
8