

Opinia o rozprawie doktorskiej mgr inż. Pauliny Świątkiewicz
pt. „Equilibrium Finite Element Method in the Problem of the Thin Plate Bending”

1. Ogólna charakterystyka rozprawy

W pracy przedstawiono naprężeniowy wariant metody elementów skończonych w zadaniach zginania cienkiej płyty. Metoda ta, oparta na minimalizacji energii komplementarnej i prowadząca do opisu naprężeniowego, jest alternatywą do powszechnie stosowanej przemieszczeniowej metody elementów skończonych.

Rozprawa doktorska liczy 154 strony, w tym 106 stron zasadniczego tekstu oraz spis literatury zawierający 174 pozycje, oraz dodatek. Rozdział pierwszy przedstawia krótki wstęp, cel pracy oraz zwięzły opis zawartości rozprawy. W rozdziale drugim przedstawiono tło literaturowe, zaczynając od podstawowych prac dotyczących sformułowań dualnych w metodzie elementów skończonych, liniowej teorii płyt cienkich oraz dyskretyzacji metodą elementów skończonych. Ta część liczy ponad 20 stron i prezentuje prace omawiające cechy metod dyskretnych, istotne przy późniejszym omawianiu metody naprężeniowej. Rozdział trzeci przedstawia szczegółowo podejście równowagowe do metody elementów skończonych w opisie zadań zginania płyt cienkich. Rozdział czwarty, siedmiostronicowy, omawia zastosowaną metodę uzyskiwania pola przemieszczeń na podstawie uzyskanych rozwiązań naprężeń (momentów gnących). Rozdział piąty omawia oszacowanie błędów metody. Rozdział szósty, liczący 31 stron, przedstawia przykłady obliczeniowe i porównania wyników. W rozdziale siódmym Autorka przedstawia wnioski oraz wykaz zagadnień i problemów do rozwiązania w przyszłości. Dwunastostronicowy *Dodatek* zawiera opis matematyczny i przykłady sformułowań i rozwiązań zadania belki Bernoulliego-Eulera, która może być uznana jako jednowymiarowy przykład i instrukcja ułatwiająca zrozumienie całej treści rozprawy dotyczącej płyt cienkich.

W pracy do wyprowadzenia naprężeniowego sformułowania metody elementów skończonych w analizie statyki cienkiej płyty Kirchhoffa wykorzystano liniowe i kwadratowe funkcje kształtu. Na tej podstawie zbudowano dwa rodzaje elementów: trójkątne trójwęzłowe oraz sześciowęzłowe. Warunki brzegowe spełniono za pomocą mnożników Lagrange'a. Pełnią one rolę odpowiednich stopni swobody. Dzięki temu można zdefiniować ustalone wartości obciążenia uogólnionego na krawędzi płyty, tj. momentu zginającego oraz siły poprzecznej, a w innym przypadku mnożniki te służą jako dodatkowe stopnie swobody do zapewnienia równowagi sił pionowych w węzłach narożnych.

2. Cel badań

Tezą rozprawy jest twierdzenie, że naprężeniowa metoda elementów skończonych może być skuteczna w analizie zadań statyki płyt cienkich.

Elementami nowatorskimi, wprowadzonymi w rozprawie w szerokim zakresie, są:

- sformułowanie i rozwiązanie problemu zginania płyt cienkich metodą naprężeniową,
- podanie wielorakiego sposobu uwzględniania warunków brzegowych,
- matematyczne oszacowanie błędu aproksymacji rozwiązania,
- metoda wyznaczania pól przemieszczeń na podstawie uzyskanych rozwiązań naprężeń/momentów gnących.

Na tle dostępnej literatury postawione cele należy uznać za nowatorskie. Całościowe rozwiązanie problemu i przeprowadzona dyskusja założeń, ich realizacji oraz uzyskanych wyników jest wartościowe z naukowego i inżynierskiego punktu widzenia.

Ważną rolą naukowca jest poszukiwanie nowych metod opisu rzeczywistości. Zwykle popularność zyskują metody łatwe do zrozumienia i zastosowania. Późniejsze wykorzystanie ich przez szerszą grupę osób zwiększa popularność i jednocześnie ogranicza chęć podążania w badaniach innymi drogami. Jednak w dobie powszechnego wykorzystania komputerów i gotowych pakietów do symulacji, należy podejmować wysiłki badań i wprowadzania metod alternatywnych, które mimo trudności pojęciowych, charakteryzują się istotnymi zaletami. Trud programistyczny ponoszony jest jednorazowo, a wykorzystanie oprogramowania przez wielu późniejszych użytkowników nie wiąże się już z dodatkowym indywidualnym kosztem. Z tego względu należy uznać wybór tematu rozprawy doktorskiej za prawidłowy.

3. Omówienie rozprawy

Rozprawa dotyczy naprężeniowej wersji metody dyskretnej analizy zadań statyki płyt cienkich. O ile w powszechnie stosowanej metodzie elementów skończonych niewiadomymi wielkościami fizycznymi są przemieszczenia wybranych punktów obszaru, to w przypadku wariantu naprężeniowego są to naprężenia. W przypadku zginania płyt są to momenty gnące. Klasyczne metoda elementów skończonych zyskała popularność dzięki naturalnym sformułowaniom, w którym minimalizowane funkcjonały uzależnione są od uogólnionych przemieszczeń wybranych punktów, oraz prostym opisom warunków brzegowych. Metoda naprężeniowa z kolei, poza innym pojęciowo sformułowaniem, niesie trudniejszy opis warunków brzegowych oraz zewnętrznego obciążenia. Oba sformułowania mają swoje wady i zalety. Metoda elementów skończonych, mimo ciągłości pól przemieszczeń w węzłach siatki dyskretnej, często nie zapewnia pełnej ciągłości przemieszczeń na krawędziach elementów skończonych. Nie ma też ciągłości pól odkształceń czy naprężeń. Metoda naprężeniowa wyprowadzana jest z zasady minimum energii komplementarnej. W rozprawie wykorzystano funkcje Southwella do spełnienia równań równowagi. Autor publikacji sprzed 70. lat pokazał, że wprowadzając dwie funkcje U i V , można problemy zginania powiązać z przemieszczeniami membranowymi i w związku z tym rozwiązywać dowolnymi metodami obliczeniowymi.

Doktorantka dokonuje przeglądu metod opisu elementów skończonych płyt, przy różnym stopniu dopasowania funkcji aproksymujących rozwiązanie. Pokazuje ewolucję modeli i wynikających z ich sformułowań kolejnych udoskonaleń.

Warunki brzegowe wyrażone naprężeniami wymagają użycia liniowej kombinacji niewiadomych. Brzeg swobodnie podparty np. wymaga zerowania odpowiedniej kombinacji momentów gnących występujących na brzegu. Brzeg swobodny z kolei wymaga spełnienia zestawu trzech warunków. W pełni zamocowany brzeg najłatwiej opisać, gdyż nie narzuca się dodatkowych warunków naprężeniowych wymagających spełnienia.

W dalszej części opisu i wyprowadzania odpowiednich zależności metody, omawiane są elementy trójkątne, w tym funkcje interpolacyjne, odpowiednie operatory różniczkowe i końcowe macierze charakterystyczne elementów. Odpowiednio opisane są zależności w punktach wewnętrznych brzegów elementów.

Rozdział czwarty opisuje uzyskiwanie pola przemieszczeń z otrzymanych wcześniej pól naprężeń. Całkowanie pola odkształceń nie jest wygodną w praktyce procedurą. Przedstawiono w tym zadaniu oryginalną metodę opartą na metodzie najmniejszych kwadratów. Pole przemieszczeń uzyskuje się minimalizując reszty, po podstawieniu postulowanego rozwiązania do równań definiujących momenty gnące. Funkcjonał został zapisany macierzowo, z wykorzystaniem funkcji interpolujących. Współczynniki przy odpowiednich członach funkcjonału (4.6) uprzywilejowują je w zadanych proporcjach. Tu zapewne przydatna byłaby ocena, czy zamiast stałych wartości d , nie byłoby wskazania do uzależnienia wag od wielkości elementów czy intensywności lub rozkładu obciążenia.

Nasuują się też dalsze pytania. Dlaczego do wyznaczenia pola przemieszczeń nie wykorzystuje się elementów trójkątnych, takich jakie są używane przy wyznaczaniu momentów? Jaka jest dokładność wyników w przypadku obu typów elementów? Te wątpliwości warto skomentować, gdyż otrzyma się wówczas pełniejszą ocenę prezentowanej metody w odniesieniu do klasycznej metody elementów skończonych.

W rozdziale piątym przeprowadzono ocenę błędu aproksymacji rozwiązania. W literaturze formułuje się wiele metod oceny dokładności metod przybliżonych analizy zadań opisywanych równaniami eliptycznymi. Mimo różnorodnych założeń, wnioski zwykle sprowadzają się do oszacowania błędu w odniesieniu do rzędu równania różniczkowego opisującego problem. W rozprawie doktorskiej przyjęto, że jako wartość odniesienia rozwiązań wykorzystano średni błąd aproksymacji statycznej i kinematycznej. Skoro oba sformułowania dążą do rozwiązania dokładnego z góry i z dołu, to takie założenie, wobec braku lub trudności w uzyskaniu rozwiązania dokładnego, jest logiczne. W ten sposób przeprowadzono ocenę jakości rozwiązań opisanych w następnym rozdziale.

Rozdział opisujący przykłady obliczeniowe jest obszerny i liczy 21 stron. Płyta kołowa równomiernie obciążona, analizowana była przy różnym stopniu zagęszczenia siatki podziału. Wykazano zbieżność do rozwiązania dokładnego wraz z zagęszczaniem siatki podziału. Zgodnie z oczekiwaniami, wyniki pokazują niedoszacowanie rozwiązań uzyskanych przemieszczeniową metodą elementów skończonych i przeszacowanie w przypadku wariantu naprężeniowego.

Drugi przykład pokazuje wyniki obliczeń kwadratowej płyty o dwóch przeciwległych bokach zamocowanych oraz dwóch swobodnie podpartych. W tym przypadku również zastosowano elementy w kształcie trójkątów w kolejno zagęszczonych siatkach podziału. W tym przypadku również przeprowadzono analizę dokładności wyników.

Kolejny przykład to płyta trapezowa z zamocowanym jednym bokiem oraz podpartymi dwoma pozostałymi narożami. Tu również zastosowano elementy trójkątne w kolejno zagęszczanych siatkach podziału. Udokumentowanie wyników w przypadku wszystkich zamieszczonych przykładów jest bardzo rzetelne i pokazuje zbieżność nie tylko podstawowych wielkości wynikowych czyli momentów gnących, ale również błędu energii całkowitej w przypadku różnego typu elementów i różnego stopnia zagęszczenia siatki.

Kolejnym przykładem jest ortotropowa prostokątna płyta. Niezrozumiałe są rysunki 6.25 oraz 6.26, pokazujące profil płyty. Ten punkt wymaga wyjaśnienia.

Następny przykład to płyta kwadratowa obciążone siłami skupionymi działającymi w przeciwnych kierunkach, przyłożonymi w przeciwległych narożach. W tym przypadku wydzielono ćwiartkę płyty z uwagi na symetrię i anty symetrię zadania.

Następny przypadek to płyta w kształcie trapezu, z jednym swobodnym bokiem.

Wszystkie uzyskane wyniki są zgodne z intuicją inżynierską oraz doświadczeniami numerycznymi recenzenta. Trzeba tu podkreślić dużą różnorodność doboru zadań testowych oraz bardzo rzetelne i wszechstronne zaprezentowanie wyników oraz ich ocenę i komentarze.

4. Uwagi i dyskusja

Poniższe uwagi mają charakter dyskusyjny i nie obniżają wartości rozprawy. Niemniej jednak nasuwają się recenzentowi i warto uwzględnić je w ewentualnych dalszych pracach.

- Trzeba tu postawić pytanie, jak można wykorzystać uzyskane przez doktorantkę wyniki oraz opracowane wnioski, przy rozwiązywaniu kilku typowych i często analizowanych numerycznie grup zadań. Są to m.in. zadania z materiałowymi nieliniowościami, geometrycznymi nieliniowościami, zadania pęknięcia, zadania z adaptującą się siatką, czy zadania kontaktowe.
- Duże znaczenie przy prezentacji metody obliczeniowej jest oszacowanie kosztu numerycznego w odniesieniu do innych znanych metod. W takim przypadku należy oszacować koszt generowania macierzy współczynników układu równań, koszt jego rozwiązania oraz koszt wykonania obliczeń pochodnych, wynikowych wielkości fizycznych. Nie ma to oczywiście znaczenia w przypadku zadań testowych, ale pozwala ocenić skuteczność metody nie tylko pod względem dokładności wyników ale również wydatku obliczeniowego.
- Słabą stroną sformułowania naprężeniowego jest konieczność indywidualnego formułowania znacznej części procesu obliczeniowego w przypadku każdego kolejnego typu konstrukcji. Skomplikowane etapy uwzględniania warunków brzegowych, wyznaczenia przemieszczeń czy uwzględniania członów nieliniowych zadania kontaktu lub pęknięcia, hamują wykorzystanie metody. Czy można sformułować ogólne wskazania i podać sposób postępowania przy rozwiązywaniu dowolnego równania różniczkowego, niezwiązanego z konkretnym typem konstrukcji inżynierskiej?

Warto też zwrócić uwagę na pewne drobne błędy.

- Autorka nie zawsze używa poprawnych nazw w języku angielskim np. pojawia się *flat plate* zamiast *thin plate* na określenie płyty cienkiej.
- Zwrot „In this paper ...” na str. 73 związany jest zapewne z przygotowaniem materiału do publikacji w czasopiśmie.
- W maszynopisie widnieją pewne nieliczne, powtarzające się błędy językowe.

5. Wniosek końcowy

Rozprawa doktorska Pani mgr inż. Pauliny Świątkiewicz prezentuje wysoki poziom zarówno pod względem merytorycznym jak i formy edytorskiej sporządzonego maszynopisu. Doktorantka stawia w rozprawie tezę, formułuje problem, rozwiązuje go i wykazuje skuteczność zaproponowanej metody, a tym samym słuszność tezy. W rozprawie zawarte są wszystkie szczegóły naukowe pozwalające powtórzyć obliczenia oraz ocenić i wykorzystać opisaną metodę w ewentualnych zastosowaniach inżynierskich. Uwagi dyskusyjne należy traktować jako wskazówki w dalszej pracy naukowej. W opinii recenzenta przedłożona rozprawa doktorska **spełnia wszystkie wymagania** zawarte w ustawie Ustawie z dn. 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz.U. 2003 r., Nr 65, poz. 595 z późniejszymi zmianami). **Wnoszę o dopuszczenie rozprawy do publicznej obrony.**

