Prof. dr hab. inż. Mieczysław Kuczma
Instytut Konstrukcji Budowalnych
Politechnika Poznańska
ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań

kom.: 662 14 00 73
e-mail: mieczyslaw.kuczma@put.poznan.pl

Poznań, 20.11.2017r.

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr inż. Martyny RABENDY

pt.: **Drgania prostokątnych płyt mikro-strukturalnych z gęstym dwukierunkowym układem żeber**

Podstawa opracowania:
Powołanie na recenzenta przez Radę Wydziału Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Politechniki Łódzkiej; pismo Dziekana Wydziału Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska PŁ – prof. PŁ dr. hab. inż. Marka Lefika, datowane 02.03.2017r.

1. Przedmiot i ogólna charakterystyka pracy

Przedmiotem rozprawy doktorskiej mgr Martyny Rabendy jest modelowanie teoretyczne i symulacje komputerowe prostokątnych płyt o regularnej mikro-strukturze wewnętrznej, utworzonej przez dwa różne jednorodne sprężyste materiały. Z jednego materiału zbudowane są belki, nazywane żebrami, rozmieszczone periodycznie w dwóch ortogonalnych kierunkach, a drugi materiał stanowi wypełnienie tak powstałego układu (rusztu). Ponadto analizowane są płyty typu FGM o funkcyjnej gradacji własności spowodowanej wolno zmieniającą się szerokością żeber. Autorka rozpatruje zagadnienie dynamiki takich płyt zginanych bez obciążeń siłami normalnymi w płaszczyźnie płyty oraz przypadek z udziałem sił normalnych. Rozważania teoretyczne ukierunkowane są na opracowanie uśrednionego modelu matematycznego badanego zagadnienia, który pomimo makroskopowego charakteru uwzględniałyby jednak cechy mikro-struktury płyty. Modele makroskopowe rozpatrywanych płyt, wyrażone przez uśrednione równania dynamiki Autorka otrzymała korzystając z techniki tolerancyjnego uśredniania. Technikę takiego modelowania ośrodków z mikrostrukturą zapoczątkował prof. Czesław Woźniak i jest ona dalej rozwijana przez jego uczniów i współpracowników, w tym obu promotorów tej rozprawy. Tematyka rozprawy wpisuje się w aktualne kierunki badań mechaniki niejednorodnych materiałów i konstrukcji. Pozytywnie oceniam osiągnięte wyniki badań oraz aktywność publikacyjną i konferencyjną Doktorantki.

Rozprawa liczy 150 stron, na które składają się 7 numerowanych rozdziałów od Wstępu do Załącznika A, oraz Streszczenie i Summary (w j. ang.). Bibliografia, stanowiąca rozdział 6., zawiera 146 pozycji. Układ logiczny rozprawy jest poprawny. Redakcja rozprawy w zakresie układu tekstu i rysunków jest staranna (recenzent zauważył tylko nieliczne pomyłki edytorskie), ale miejscami formuły matematyczne zapisane są niepotrzebnie zbyt ogólnie (np. w krzywoliniowym układzie współrzędnych) lub przy braku spójności oznaczeń, co może czytelnikowi utrudniać lekturę pracy lub prowadzić do nieporozumień.

2. Opis i ocena pracy

We *Wstępie*, rozdział 1., Autorka uzasadnia wybór przedmiotu badań, dokonuje przeglądu literatury, określa cel i zakres pracy, oraz formułuje tezy pracy. Cel pracy podała następująco: *„Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie oraz aplikacja uśrednionego modelu matematycznego opisującego dynamiczne zachowanie płyt cienkich o budowie mikroniejednorodnej.”.*

Doktorantka stawia dwie tezy badawcze:

1. *„Technika tolerancyjnego uśredniania jest efektywną metodą pozwalającą uzyskać uśrednione równania ruchu cienkiej płyty o dwukierunkowej gęstej mikrostrukturze.”*
2. *„Uzyskane uśrednione równania ruchu umożliwiają dobór parametrów materiałowych i budowy płyty na poziomie mikro w celu uzyskania pożądanych częstości drgań swobodnych analizowanej płyty.”*

Uwagi recenzenta.

Zestawienie stosowanych w pracy oznaczeń, zdaniem recenzenta, powinno być na początku (lub na końcu) rozprawy, a nie jako jeden z podrozdziałów, tutaj podrozdział 1.5 pt. *Ważniejsze oznaczenia.* Wzory 1.1 – 1.3 wymagają korekty oznaczeń.

W rozdziale 2., pt. *Podstawy modelowania techniką tolerancyjnego uśredniania*, Autorka przytacza podstawowe pojęcia, definicje i założenia modelowania tolerancyjnego. W szczególności omawia takie podstawowe pojęcia jak: *komórka*, *parametr tolerancji*, oraz *funkcja tolerancyjnie periodyczna.* Następnie podaje sposób otrzymywania uśrednionych równań ruchu techniką tolerancyjnego uśredniania z wykorzystaniem (uśrednionego) funkcjonału Lagrange'a. W rozdziale tym podała również funkcje kształtu oscylacji przemieszczeń dla rozpatrywanych płyt o dwukierunkowej mikro-strukturze, które przyjęła w każdym z dwóch kierunków jako iloczyn tensorowy funkcji odcinkowo liniowej typu „piła" i funkcji parabolicznej. Zamysłem Autorki jest, aby za pomocą funkcji kształtu odwzorować zaburzenia przemieszczeń, w stosunku do rozwiązania „gładkiego uśrednionego", wywołane mikro-niejednorodnościami budowy ciała. Określenie funkcji kształtu jest istotnym zagadnieniem w tej technice modelowania.

Uwagi recenzenta.

Lektura tego rozdziału wywołuje następujące pytania i uwagi:

(P1) Funkcje periodyczne odgrywają podstawową rolę w użytej technice tolerancyjnego uśredniania. Autorka pisze na str. 21, linia powyżej wzoru 2.2: „Jeżeli dla … istnieje Δ–periodyczna funkcja $\tilde{f}^{(k)}(x,\cdot)$ i poniższe warunki są spełnione….to…". Dobrze byłoby tutaj także zapisać w postaci jawnej warunki, jakie musi spełniać funkcja, aby być funkcją Δ–periodyczną. Czy we wzorze 2.3 całkowanie nie powinno być względem zmiennej y zamiast podanej zmiennej z ?

(P2) Czym uzasadnione jest ograniczenie dziedziny funkcji kwadratowej, oznaczonej tutaj w recenzji przez T_i,

$$T_i(y_i) = \left[1 - \left(\frac{2y_i}{b_i}\right)^2\right],$$

do przedziału $y_i \in D_i = \langle -\frac{b_i}{2}, \frac{b_i}{2} \rangle$, jak pokazano na rys. 2.2, podczas gdy dziedzina D_j funkcji $S_j(y_j)$ zmiennej y_j w kierunku prostopadłym (przy zamianie ról $T_i \leftrightarrow S_j$), $y_j \in D_j = \langle -\frac{l_j}{2}, \frac{l_j}{2} \rangle$, jest większa, tzn. $D_i \subset D_j$?

(P3) Jak określony jest iloczyn $S_i(y_i) \cdot T_j(y_j)$, $i,j = 1,2, i \neq j$, czyli funkcja kształtu fluktuacji $h^A(x_\alpha, y_\beta), A = I, II$ według wzorów 2.17, 2.19, na zbiorach $\Delta(x) \setminus D_i \times D_j$, gdzie $\Delta(x) = l_1 \times l_2$?

Rozdział 3, zatytułowany *Dynamika płyt nie poddanych działaniu sił normalnych w płaszczyźnie środkowej płyty*, jest jednym z dwóch zasadniczych rozdziałów rozprawy. W rozdziale tym Autorka, wychodząc z równań bezpośredniego opisu płyt cienkich Kirchhoffa, uzyskała uśrednione równania modelu tolerancyjnego. Jest to równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych IV rzędu, mające postać analogiczną do znanego równania ruchu dla jednorodnych płyt ortotropowych. Analizie poddała dwa rodzaje płyt prostokątnych swobodnie podpartych; płyty o budowie dwukierunkowo periodycznej, tj. płyty z periodycznym układem żeber w dwóch ortogonalnych kierunkach, oraz płyty typu FGM o funkcyjnej gradacji własności makroskopowych. Obliczyła uśrednione moduły występujące w otrzymanych równaniach ruchu, wyrażające się rozbudowanymi wzorami matematycznymi, ale w postaci zamkniętej. Dokonała sprawdzenia otrzymanego modelu tolerancyjnego poprzez porównanie wartości częstości drgań swobodnych otrzymanych z wyprowadzonych równań modelu tolerancyjnego i z metody elementów skończonych programem ABAQUS dla bezpośredniego opisu mikro-struktury. Autorka przeprowadziła wiele analiz parametrycznych częstości drgań swobodnych dla różnych proporcji materiałowych własności żeber i matrycy, oraz różnych proporcji szerokości żeber do wymiaru komórki. W przypadku płyt typu FGM zbadała wpływ różnych funkcji opisujących zmianę szerokości żeber na wartości częstości drgań swobodnych. Jak potwierdzają obliczenia, zmieniając grubość żeber w płycie według zadanej z góry funkcji możemy odpowiednio dobrać częstości drgań swobodnych.

Uwagi recenzenta.

(P4) Jakie jest uzasadnienie wprowadzenia w 5. linii od dołu str. 31 tensora metrycznego $g_{\alpha\beta}$, gdy powyżej w 2. linii tej strony Autorka stwierdza „*Wprowadzono ortogonalny kartezjański układ współrzędnych* $Ox_1x_2x_3$ ...", co jest zgodne z wcześniejszym rys. 3.1 (natomiast nie do końca ten zapis jest zgodny z rys. 3.2, gdzie zmienne niezależne w płaszczyźnie płyty oznaczono jako x^1, x^2 oraz z zapisem we wzorze 3.1 i innych) ? Tutaj można się domyślać, że chodzi o te same współrzędne, ale nie jest to regułą, bo przez $e_{\alpha\beta}$ i $e^{\alpha\beta}$ na str. 32 Autorka oznacza zupełnie różne wielkości, odpowiednio – składowe tensora odkształcenia (wzór 3.2) i symbol permutacyjny (wzór 3.4).

(P5) Autorka podaje na str. 31 definicję operatorów $\partial_k = \partial/\partial_{x^k}$ i $\nabla = (\partial_1, \partial_2)$, ale brak definicji operatorów $\nabla_{\alpha\beta}$ i ∇_α.

(P6) Wzór 3.5 nie polega na „...uśrednieniu po grubości płyty" jak pisze Autorka w 7 linii od dołu str. 32, ale na scałkowaniu po grubości płyty (i jednostkowej długości).

(P7) Przejście z wzoru 3.6 do wyniku zapisanego wzorem 3.7 wymagałoby komentarza wyjaśniającego; zapis składników we wzorze 3.7 jest niezgodny z zasadami sumowania w notacji wskaźnikowej.

(P8) Jak uzasadnić brak prędkości (szybkości) $\dot{w}_3$ w funkcjonale działania zdefiniowanym wzorem 3.10?

(P9) Prawo sprężystości, które Autorka używa to prawo „Hooke'a", a nie jak podano w pracy: prawo „Hook'a".

(P10) Wychodząc z kinematycznych zależności klasycznej teorii płyt cienkich Kirchhoffa, zapisanych równaniami 3.1, Doktorantka stosuje dekompozycję mikro-makro do składowych pola przemieszczeń w płaszczyźnie płyty, w_α $(\alpha = 1{,}2)$, jak to pokazują przyjęte zależności 3.12 i 3.13, powtórzone poniżej:

$$w_\alpha(x^\beta, z, t) \cong w_{\alpha h}(x^\beta, y^\gamma, z, t) = \left(-\nabla_\alpha V_3(x^\beta, t) + h^A(y^\gamma, x^\alpha)\, u_\alpha^A(x^\beta, t)\right) \cdot z \qquad 3.12_2$$

$$w_{\alpha h}(x^\beta, y^\delta, z, t) = \left(-\nabla_\alpha V_3(x^\beta, t) + h^A(x^\beta, t)\, u_\alpha^A(x^\beta, t)\right) \cdot z \qquad 3.13_4$$

$$\nabla_\gamma w_{\alpha h}(x^\beta, y^\delta, z, t) = \left(-\nabla_{\alpha\gamma} V_3(x^\beta, t) + \nabla_\gamma h^A(x^\beta, t)\, u_\alpha^A(x^\beta, t)\right) \cdot z \qquad 3.13_5$$

$$\dot w_{\alpha h}(x^\beta, y^\delta, z, t) = \left(-\nabla_\alpha \dot V_3(x^\beta, t) + h^A(x^\beta, t)\, \dot u_\alpha^A(x^\beta, t)\right) \cdot z \qquad 3.13_6$$

Jak wyjaśnić odmienne zmienne niezależne funkcji h^A we wzorach 3.12, gdzie $h^A = h^A(y^\gamma, x^\alpha)$ i tej samej funkcji h^A we wzorach 3.13, gdzie $h^A = h^A(x^\beta, t)$? Jakie założenia przyjęto przy obliczaniu gradientu $\nabla_\gamma w_{\alpha h}$ i pochodnej czasowej $\dot w_{\alpha h}$ funkcji $w_{\alpha h} = w_{\alpha h}(x^\beta, y^\delta, z, t)$, dochodząc do pokazanych powyższych wzorów 3.13_5 i 3.13_6?

(P11) W podrozdziale 3.5 „*Walidacja otrzymanych wyników – płyty prostokątne z periodycznym układem żeber*" Doktorantka omawia dokonane sprawdzenie wyników otrzymanych według opracowanego modelu z wynikami uzyskanymi za pomocą pakietu obliczeniowego ABAQUS/Standard opartego na metodzie elementów skończonych. Rozpatrzono płytę o wymiarach 4,00 x 4,00 m, grubości 0,10 m, o wymiarach komórki $l_1 = l_2 = l = 0{,}20$ m, szerokości stalowych żeber 0,05 m oraz betonowej matrycy, traktując płytę w programie Abaqus jako powłokę i przyjmując 4-węzłowy element (typu „shell") S4R. Obliczenia ograniczono do harmonicznych drgań swobodnych, co pozwoliło uzyskać rozwiązanie analityczne modelu tolerancyjnego (TTA) w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego. Uzyskano dobrą zgodność wyników metodą TTA i programem Abaqus – różnice względne od 1,13% do 2,06% dla jednorodnej płyty betonowej (żebra i matryca z tego samego materiału), oraz od 1,62% do 2,13% dla niejednorodnej płyty z periodycznym układem żeber. Należy jednak wyraźnie stwierdzić, że dokonane porównanie za pomocą programu Abaqus to „weryfikacja" modelu, a nie jak Autorka pisze w tytule „walidacja", ponieważ walidacji dokonujemy porównując dane wyniki z wynikami uzyskanymi w drodze eksperymentu fizycznego – nie wirtualnego (przynajmniej dotychczas!).

(P12)Doktorantka wykazała obliczeniowo możliwość dobierania częstości drgań swobodnych płyty, poprzez zmianę grubości żeber w płycie według odpowiedniej funkcji. Pokazała, że w ten sposób można uzyskać podwyższenie częstości drgań przy mniejszym zużycie materiału niż dla żeber w płycie o równomiernej grubości.

Rozdział 4, zatytułowany *Dynamika płyt poddanych działaniu sił zewnętrznych w płaszczyźnie środkowej płyty*, przedstawia uogólnienie zadania rozpatrywanego w rozdziale 3. Dotyczy dynamiki płyt mikro-strukturalnych wstępnie poddanych działaniu sił normalnych w płaszczyźnie środkowej płyty. Autorka przedstawia tutaj równania modelu, który uwzględnia działanie naprężeń normalnych i jest bogatszy w stosunku do modelu z rozdziału poprzedniego o dodatkowe wyrażenia w składowych przemieszczeniach i odkształceniach w płaszczyznach równoległych do środkowej płaszczyzny płyty (wzory 4.13). Różniczkowe równanie równowagi dynamicznej z niewiadomą funkcją ugięcia płyty ma postać analogiczną do znanego równania ruchu dla jednorodnych płyt ortotropowych, ale jego współczynniki, tj. sztywności płyty, są obliczane z uwzględnieniem dwuskładnikowej budowy płyty. Analiza numeryczna obejmowała zbadanie wpływu sił normalnych na cztery pierwsze częstości drgań swobodnych dla różnych proporcji szerokości żeber do wymiaru komórki. W tym przypadku zgodność wyników proponowaną metodą i programem Abaqus była duża, gdy płytę traktowano jako jednorodną ortotropową - różnice względne pomijalne, od 0,09% do 0,87%, natomiast ujawnił się znaczny błąd modelowania w programie Abaqus płyty niejednorodnej jako składającej się z żeber i matrycy z tego samego materiału – różnice względne od 3,43% do 12,19%, co skutkowało błędem względnym modelu TTA i programu Abaqus od 2,71% do 11,42%, gdy siła osiowa $N=N^{11}=100$ kN/m; błędy te malały dla analizowanych większych sił normalnych (1 000 kN/m i 10 000 kN/m). W przypadku płyty o funkcyjnej zmienności grubości żeber, skutkującej zmiennymi współczynnikami sztywności także w modelu uśrednionym, do wyznaczenia drgań swobodnych zastosowano, w rozdziałach 3 i 4, metodę numeryczną Galerkina. Wyniki analiz parametrycznych pokazano na licznych wykresach dobrze ilustrujących charakterystyczne własności analizowanej struktury dwuskładowej.

Uwagi recenzenta.

Ogólnie, krytyczne uwagi są analogiczne jak poczynione powyżej odnośnie rozdziału 2. i rozdziału 3., i dotyczą (choć w mniejszym stopniu) zapisu funkcji, tzn. wykazu zmiennych niezależnych i niespójnego indeksowania zmiennych, ponownie niewłaściwego użycia słowa „walidacja" (podrozdział 4.4), nazwiska „Hook'a", oraz zwrotu „bezwładność inercyjna" (str. 74). Natomiast pozytywnie oceniam otrzymane wyniki analiz numerycznych. Potwierdzają one poprawność proponowanego modelu w zakresie przeprowadzonych obliczeń.

Rozdział 5., zatytułowany *Wnioski końcowe*, zawiera krótkie podsumowanie i wnioski z analizy otrzymanych wyników.

Praca kończy się *Bibliografią* liczącą 146 pozycji i *Załącznikiem* zawierającym wzory na obliczenie wartości uśrednionych modułów sztywności.

Na podstawie szczegółowej lektury rozprawy oraz wyżej przedstawionego jej zakresu i treści, jak również poczynionych uwag i ocen, uważam, że Doktorantce udało się pomyślnie zrealizować cel pracy i wykazać słuszność obu postawionych tez badawczych. Analizowany w pracy problem jest trudny i do jego rozwiązania Autorka zastosowała zaawansowany aparat matematyczny (równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych, rachunek wariacyjny).

Chcę tutaj też wyraźnie zaznaczyć, że poczynione powyżej uwagi krytyczne odnoszą się do subtelności matematycznego opisu zagadnienia nie zniekształcając wyników końcowych pracy i nie obniżają mojej pozytywnej oceny pracy, a mają raczej na celu zwrócenie uwagi na duży stopień złożoności tego zadania badawczego.

3. Wniosek końcowy

W konkluzji końcowej stwierdzam, że rozprawa doktorska mgr inż. Martyny Rabendy stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego i potwierdza Jej wiedzę teoretyczną w dziedzinie mechaniki, spełnia tym samym wymóg art. 13 ust. 1 ustawy z dnia 14 marca 2003r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki. Otrzymane wyniki mają nie tylko charakter teoretyczny, ale także wartość utylitarną, bo opracowany model badanych płyt dwuskładnikowych o mikrostrukturze (np. stalowe żebra i betonowa matryca) może być wykorzystany w praktycznych obliczeniach inżynierskich. Doktorantka wykazała, że posiada rozległą wiedzę w zakresie modelowania teoretycznego, posługiwania się zaawansowanym aparatem matematycznym oraz symulacji komputerowych w dziedzinie mechaniki materiałów i konstrukcji.

Stawiam wniosek o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie Kandydatki do publicznej obrony i ubiegania się o stopień naukowy doktora w dyscyplinie *Budownictwo*.