Prof. dr hab. Wiesław Nagórko
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska

Warszawa, 21.09.2017

O c e n a

rozprawy doktorskiej mgr inż. Magdy Kaźmierczak-Sobińskiej

pt. WYBRANE ZAGADNIENIA MECHANIKI CIENKICH PŁYT MIKROSTRUKTURALNYCH O FUNKCYJNEJ GRADACJI WŁASNOŚCI

Podstawa oceny: pismo Dziekana Wydziału Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska PŁ dr hab. inż. Marka Lefika, prof. PŁ.

Przedmiot i cel pracy

Modele matematyczne opisujące obiekty materialne są strukturami relacyjnymi, w których podstawowymi relacjami są równania. W równaniach tych, na ogół, poszukiwanymi wielkościami są skutki jakichś oddziaływań na ciało materialne. W przypadku ciał sprężystych, a z takimi mamy do czynienia w omawianej rozprawie, skutkami są przemieszczenia, odkształcenia bądź naprężenia zaś oddziaływaniami są zwykle siły.

Równania łączące wielkości poszukiwane z oddziaływaniami są podstawą do sformułowania zagadnienia początkowo-brzegowego. Liniowa teoria sprężystości ciał niejednorodnych ma taki komplet równań i związków opisujących poprawnie, z punktu widzenia matematyki, swoje zagadnienia początkowo-brzegowe.

Dlaczego więc ciągle zajmujemy się nowymi modelami takich ciał?

Odpowiedź jest znana – bo nie potrafimy większości zagadnień początkowo-brzegowych rozwiązać analitycznie, nie potrafimy wskazać rozwiązań zamkniętych, choć wiemy, że istnieją. Poszukujemy więc modeli prostszych względem liniowej teorii sprężystości albo metod prowadzących do otrzymywania rozwiązań przybliżonych.

W pracy rozważa się cienkie, sprężyste płyty niejednorodne. Nie jest to dowolna niejednorodność. Rozważana płyta składa się z elementów - komórek, których jest dużo (wymiar charakterystyczny komórki jest dużo mniejszy od wymiaru charakterystycznego płyty), komórki składają się z dwu składników sprężystych i jednorodnych, ponadto sąsiednie komórki są prawie identyczne (oddalone od siebie mogą, ale nie muszą znacznie się różnić). W szczególności, gdy komórki są identyczne, mamy do czynienia z ciałem o niejednorodności periodycznej. Wyróżnione płyty są więc ciałami o funkcyjnej gradacji własności materiałowych, dla których funkcje opisujące tę zmienność są wolnozmienne.

Założono ponadto, że funkcyjna gradacja własności płyty będzie występować tylko w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny środkowej płyty, (nie będzie zmienności wzdłuż osi prostopadłej). Płyty takie nazwano płytami o *poprzecznej funkcyjnej gradacji własności.*

Takie ciała nie muszą być opisywane liniową teorią sprężystości, ale np. modelem cienkich, sprężystych płyt niejednorodnych (teorią Kirchhoffa), który już jest modelem uproszczonym względem liniowej teorii sprężystości. W tym modelu, zagadnienia początkowo-brzegowe opisywane są jednym równaniem różniczkowym cząstkowym z niewiadomym ugięciem, o silnie oscylujących i nieciągłych współczynnikach.

W pracy sformułowano więc cel: zbudować oraz zbadać taki model uśredniony, w którym zagadnienia dynamiczne i stateczność płyt dwuskładnikowych, o poprzecznej gradacji własności, będą opisane równaniami ze współczynnikami ciągłymi i wolnozmiennymi.

Analiza treści i ocena rozprawy

Praca liczy 97 stron. Składa się ze wstępu, trzech rozdziałów, wniosków i uwag końcowych oraz spisu literatury.

We wstępie przedstawiono krótką historię modelowania płyt sprężystych oraz metod homogenizacyjnych. Zamieszczono przegląd literatury z obszaru jednej z tych metod, metody *modelowania tolerancyjnego.*

Twórcą metody jest Cz. Woźniak. Powstała ona najpierw w wersji dla ośrodków niejednorodnych periodycznie. Warto zauważyć, że cytowana w rozprawie monografia Cz. Woźniaka i E. Wierzbickiego [133], pochodząca z 2000 roku nie jest pierwszą publikacją na ten temat. Rok wcześniej ukazała się praca Cz. Woźniaka pod tytułem *A model for of micro-heterogeneous solid* z tym samym podtytułem co wspomniana praca z 2000 roku; *Tolerance averaging versus homogenization* w serii prac Mechanik

Berichte wydawanej w Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule, (RWTH) w Akwizgranie, (Aachen).

Kilka lat później technika tolerancyjnego uśredniania została przez Cz. Woźniaka uogólniona na ośrodki nieperiodyczne. Podsumowaniem wyników stosowania tej metody jest m. in. obszerna monografia pod redakcją Cz. Woźniaka, B. Michalaka, J. Jędrysiaka, która ukazał się w 2008 roku w Wydawnictwie Politechniki Łódzkiej.

Kolejny rozdział: *Modelowanie matematyczne zagadnień dynamicznych cienkich płyt mikrostrukruralnych o funkcyjnej gradacji własności* liczy 12 stron i zawiera zwięzły opis modelowania tolerancyjnego, konstrukcję trzech modeli płyt z poprzeczną gradacją własności; model tolerancyjny, asymptotyczny i asymptotyczno-tolerancyjny. W pracy Autorka używa wymiennie terminów *model*, *system*, *struktura*, traktując je jako synonimy. Zdaniem recenzenta jest to poprawne.

Jak już zaznaczono punktem wyjścia w pracy jest teoria Kirchhoffa płyt z jednym równaniem czwartego rzędu, na ugięcie, z nieciągłymi oscylującymi na małych przedziałach określoności współczynnikami. W otrzymanych trzech modelach mamy do czynienia z układem równań na uśrednione ugięcie oraz pewne nowe niewiadome nazwane fluktuacjami, które opisują wpływ niejednorodności na rozwiązanie. Liczba równań jest więc większa, ale maja one już wolnozmienne współczynniki (otrzymane w wyniku uśrednienia), które w przypadku periodycznym są stałymi.

Otrzymane modele są oryginalnym elementem pracy i realizują sformułowany we wstępie, pierwszy cel rozprawy.

Jak już wskazano, w rozprawie skonstruowano trzy modele. Model tolerancyjny, z równaniami modelowymi (2.2.1) i (2.2.12), asymptotyczny z równaniami (2.3.1) i (2.3.9) oraz asymptotyczno-tolerancyjny. W tym ostatnim przypadku twierdzi się, że są to równania (2.4.1), (2.4.2) i (2.4.8). Nie jest to, moim zdaniem prawda, bo komplet równań, powinien być uzupełniony jeszcze o równania (2.3.9) na ugięcie uśrednione U i fluktuacje $Q^A, A = 1,2,\dots,N$, które występują w (2.4.1).

Otrzymane modele prowokują pytania o podobieństwa i różnice między nimi. Dlaczego nie wybiera się tylko jednego z nich do zastosowania inżynierskiego? Czy rozwiązane zagadnienie brzegowe w jednym modelu można rozwiązać w pozostałych? Czym się wtedy będą one różnić? Które z tych rozwiązań będzie najlepsze? Tzn., które będzie *najbliższe* rozwiązania zagadnienia brzegowego dla płyty traktowanej jako niejednorodne ciało trójwymiarowe w ramach liniowej teorii sprężystości?

Czy Autorka mogłaby przedstawić swoje przemyślenia w zasygnalizowanych tutaj sprawach?

W rozdziale są różne potknięcia stylistyczne, które zostaną omówione dalej.

W rozdziale trzecim analizuje się drgania i stateczność pasma płytowego z dwuskładnikową komórką podstawową. Pasmo ma stałą grubość i stałą rozpiętość. Składniki są izotropowe i sprężyste. Zakłada się, że w całym paśmie współczynnik Poissona jest stały.

W modelowaniu wykorzystuje się już uśrednione po grubości: gęstość, inercję obrotową i sztywność na zginanie oraz zakłada się, że są funkcjami jednej zmiennej. W dekompozycji ugięcia przyjmuje się jedną funkcję kształtu. Prowadzi to do dwu niewiadomych; uśrednionego ugięcia i jednej fluktuacji.

Równania modelowe dla modelu tolerancyjnego, asymptotycznego i tolerancyjno-asymptotycznego otrzymuje się z równań wyprowadzonych w rozdziale drugim wykorzystując założenia definiujące rozpatrywaną płytę.

Definicje podane wzorami (3.1.8) i (3.1.9) nie są poprawne. Po prawej stronie równości występuje współrzędna x a po lewej jej nie ma. Gdyby przyjąć, że jest to błąd literowy to powinno wtedy być po obu stronach, w odpowiednich miejscach, albo „x” albo „$\cdot$ ”. Po takiej zmianie pozostaje jeszcze problem funkcji γ, wprowadzonej, po raz pierwszy w tych wzorach i nie zdefiniowanej. Jest ona tylko nazwana: *gdzie γ jest funkcją rozkładu własności materiałowych*. Funkcja ta pojawia się także w następnym rozdziale, gdzie analizowane są przykłady numeryczne. Też nie wprost tylko przez jej periodyczne przybliżenie. Szkoda, że nie skomentowano tych funkcji. Jaką zmienność komórki podstawowej w paśmie opisują funkcje (4.1.10)-(4.1.15), czy w płycie kwadratowej (4.2.3)-(4.2.10)? Może warto pokazać to graficznie na powierzchni środkowej płyty?

W rozpatrywanych komórkach podstawowych składniki powtarzają się z różnym nasyceniem. Związek nasycenia z funkcją γ jest widoczny, czy w związku z tym na funkcję γ nie powinien być nałożony warunek: $0 \leq \gamma \leq 1$?

Rozwiązania równań modelowych uzyskano stosując do dwu niewiadomych, uśrednionego ugięcia i fluktuacji (zależnych od x i t) metodę rozdzielenia zmiennych.

Następnie stosując metodę Ritza otrzymano wzory na niższą i wyższą częstość drgań własnych.

Kolejny analizowany przykład to drgania własne płyty prostokątnej, w której niejednorodność tolerancyjno-periodyczna występuje w dwu prostopadłych kierunkach. Postępowanie w tym przypadku było podobne z tym, że teraz funkcje materiałowe, ugięcie, funkcja kształtu i fluktuacja zależą od dwu zmiennych przestrzennych i czasu. Metoda rozdzielenia zmiennych i metoda Ritza doprowadza do wzorów na niższą i wyższą częstość drgań własnych.

Trzecim i czwartym przykładem jest zbadanie drgań własnych oraz wyboczenia pasma płytowego na sprężystym podłożu. Wyznaczono dla nich częstości drgań własnych oraz siły krytyczne.

W rozpatrywanych przykładach zastosowano metody rozwiązywania, znane z teorii klasycznej. Jednak tutaj mamy do czynienia nie z jednym równaniem, ale układem równań. Występują w nich nie tylko ugięcie, lecz także dodatkowe niewiadome – fluktuacje. Otrzymane wzory na częstości drgań własnych oraz siły krytyczne są więc wynikami oryginalnymi i ciekawymi.

Kolejny rozdział, najobszerniejszy, liczy 47 stron, zawiera analizę rozwiązań numerycznych dla częstości drgań własnych w przypadku:

- Pasma płytowego zdefiniowanego w rozdziale 3, z czterema warunkami podparcia na krawędziach oraz pięcioma wariantami funkcji γ w ramach skonstruowanych modeli.
- Płyty kwadratowej opisanej w rozdz. 3 podpartej przegubowo z ośmioma funkcjami γ (po cztery w dwu prostopadłych kierunkach)

Analizowano także wyniki numeryczne dla sił krytycznych:

- Dla pasma płytowego spoczywającego na podłożu Winklera, opisanego w rozdz. 3, z czterema funkcjami γ .

Przedstawiono wykresy częstości drgań własnych, zależności częstości od ilorazu gęstości oraz ilorazu modułów Younga składników, zarówno dla pasma jak i dla płyty. Otrzymano kilkadziesiąt wniosków szczegółowych odnoszących się do porównań wartości częstości drgań własnych otrzymanych w różnych modelach, wpływu własności materiałowych na wielkość tych częstości oraz wartości sił krytycznych w modelu tolerancyjnym i asymptotycznym.

Rozdział zamyka porównanie częstości drgań własnych pasma płytowego z odpowiednimi częstościami wyliczonymi metodą elementów skończonych (MES był zastosowany w jakim modelu?). Otrzymano zgodność wyników modelu tolerancyjnego z obliczeniami programem Abaqus. Ciekawy jest wniosek, że wszystkie wyniki uzyskane metodą elementów skończonych dają mniejsze wartości od otrzymanych w modelu tolerancyjnym.

Szczegółowe uwagi redakcyjne

W wykazie oznaczeń indeksy i, k, l są ciągiem 1,2,3, jednak na str.14 jest k=0,1,2 oraz str. 15 jest $1, 2, \ldots, \alpha$, a α to 1,2.

Str. 5 jest *modele uniwersalne*, raczej *uogólnione*.

Str. 5 jest *układ dwuwymiarowej płyty* – raczej *model dwuwymiarowy płyty* (płyta jest fizycznie ciałem trójwymiarowym a nie dwuwymiarowym).

Str. 9 jest *pokazana jest analiza*, raczej - *przedstawiono analizę*.

Co oznacza *gładkie współczynniki* np. na str. 8, 13, także na 23. Niejednorodność jest wolnozmienna, ale zmienia się skokowo. Pasmo jest przykładem ciała o funkcyjnej gradacji własności z tym, że jest to gradacja skokowa a nie ciągła (ciągła gradacja też występuje w kompozytach, ale to nie ten przypadek).

W tytule podrozdziału rozdz. 2, jest *system tolerancyjny* a dalej jest definicja *przestrzeni tolerancji* – system nie jest zdefiniowany.

W rozprawie nie rozpatruje się płyt o zmiennej grubości, po co więc taką zmienność wprowadzać na str. 11? Podobnie strona 23.

Str. 11, str. 23 jaki jest sens ograniczenia $max d \ll l$?

Str. 13, pojawia się tu L_Π a wcześniej jest $\min(L_1, L_2)$. Skoro rozpatruje się płyty prostokątne to po co to nowe oznaczenie?

W wielu definicjach występuje sformułowanie *można nazwać*, lepiej *nazwiemy będziemy nazywać*. Podobnie str. 15 *można napisać następującą zależność* słowo *można* wprowadza dowolność, a tu powinno być *otrzymuje się następującą zależność*. Także str. 18, *wzór (2.3.1) można zapisać*, oraz str. 23, *budowa pasma może być uważana za funkcyjnie zmienną*. Budowa omawianego pasma jest z definicji funkcyjnie zmienna (a nie może być uważana).

Str. 13, te same siły oznaczone są raz przez n, drugi raz przez N.

Str. 14, we wzorze (2.1.8) brak nawiasu

Str. 14, *jest pewną funkcją stałą* lepiej *jest funkcją stałą*, co zawiera już cechę, że jest to pewna funkcja.

Nie objaśniono symbolu $O(l^{2-k})$, str. 14

Na tej samej stronie: co oznacza zapis $\Delta(x) = x + \Delta$ co tu oznacza znak „+"?

Str. 16, jest: *stosując zasadę ... dla funkcjonału* powinno być: *do funkcjonału*. Ta sama strona: nie wzór (2.1.9) lecz (2.1.5).

Str. 18, Δ_z jest przedziałem?

Str. 23, powtórzenie definicji $x \equiv x_1$, oraz powierzchnię środkową nazywa się *obszarem zajmowanym przez pasmo*.

Str. 23, dlaczego komórkę podstawową definiuje się jako odcinek na płaszczyźnie? Komórką przy jednowymiarowej zmienności jednorodności jest odcinek na prostej.

Str. 25, jest w jednym zdaniu dwa razy *gdzie*, może to zdanie lepiej zredagować?

Podsumowanie

W pracy sformułowano cel: zbudować oraz zbadać taki model uśredniony, w którym zagadnienia dynamiczne i stateczność płyt dwuskładnikowych, o poprzecznej gradacji własności, będą opisane równaniami ze współczynnikami ciągłymi i wolnozmiennymi.

W pracy skonstruowano, stosując metodę tolerancyjnego uśredniania, trzy modele: tolerancyjny, asymptotyczny i tolerancyjno-asymptotyczny. Równania w nich otrzymane są układem liniowych równań cząstkowych o współczynnikach wolnozmiennych w sposób ciągły, a więc są prostsze. Prostszą postać równań okupiono tym, że poszukiwanymi są tutaj nie tylko ugięcie płyty, ale także dodatkowe niewiadome opisujące mikroniejednorodność.

Uzyskano rozwiązania ogólne w postaci wzorów na częstości drgań własnych oraz sił krytycznych rozważanych płyt cienkich.

Przeanalizowano numerycznie wiele zagadnień szczegółowych. Otrzymane wyniki są wiarygodne i weryfikują, w postawionym w celu rozprawy zakresie, skonstruowane modele.

Wyniki są oryginalne i świadczą o biegłości Doktorantki w zakresie stosowania metod matematycznych modelowania niejednorodnych płyt sprężystych, zarówno metod analitycznych jak i numerycznych.

Omawiana rozprawa doktorska należy do obszaru mechaniki płyt i jest usytuowana we współczesnym stanie wiedzy z tego zakresu. Praca poszerza wiedzę w zakresie rozwiązywania zagadnień brzegowych cienkich płyt o funkcyjnej gradacji własności.

Stwierdzam, że rozprawa doktorska mgr inż. Magdy Kaźmierczak-Sobińskiej pt. *Wybrane zagadnienia mechaniki cienkich płyt mikrostrukturalnych o funkcyjnej gradacji własności* spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim na stopień doktora nauk technicznych w rozumieniu Ustawy. Jednocześnie wnoszę o przedstawienie jej Radzie Wydziału Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Politechniki Łódzkiej do dalszego postępowania w przewodzie doktorskim i dopuszczenie do publicznej obrony.

W. Nagórko

Wiesław Nagórko