

SUMMARY

In this work, the modelling of vibrations of three-layered sandwich structures with a periodic microstructure is presented and discussed. Sandwich structures are certain specific composites made of three layers - outer layers, which are the main bearing part of the structure and inner layer, so called *core*. The core is usually made of light-weight materials, which have two functions: they increase the stiffness of the whole structure, by increasing its thickness, and stand for the thermal and acoustic isolation. Due to the fact, that every each layer of such structures is being modelled and optimized to work best in certain specific conditions, sandwich plates can be characterised by physical and mechanical properties, which are unreachable for 'classic', homogeneous materials. Hence, they have many applications in modern engineering.

There are many different approaches to modelling of such structures. In the most simple approach, presented for example by Szcześniak (1998a), it is assumed, that such structures can be treated as a system of two thin plates, undergoing transverse vibrations, while its core is being modelled as an elastic layer connecting both outer plates. Two different approaches concerning the behaviour of elastic media are presented. In the first one, the Winkler's type elastic material, characterised by certain elasticity modulus k , is used. The second one base on the Murakami's type material concepts, where the elastic layer is being replaced by a set of small, closely spaced, uniform and homogeneous bars performing longitudinal vibrations. Both models can be easily solved as long as every layer in sandwich structure is homogeneous. In our considerations, however, it is assumed, that every each layer can be characterised by certain periodic microstructure. As a result, using aforementioned modelling concepts leads us to systems of governing equations with periodic, non-continuous and highly-oscillating coefficients, which are difficult to solve.

In order to solve the derived systems of governing equations, the *tolerance averaging technique* is used. Within this approach it is possible to transform the initial partial differential equations with certain specific type of functional coefficients into the constant, averaged form. As a result of this transformation, governing equations with constant coefficients are obtained. Unlike the homogenisation method, however, the tolerance averaging technique still allows us to investigate the micro-scale fluctuations in behaviour of considered structures and their influence on the macro-scale overall performance. Moreover, two different modelling procedures is used: *tolerance modelling* and *asymptotic-tolerance modelling* (both basing on the tolerance averaging technique). Eventually, the governing equations of four different models of the considered structure are derived.

Basing on the derived models, the vibration analysis of sandwich structures is performed. Under certain assumptions, the exact formulas for free vibration frequencies of certain periodic three-layered plates (2D periodic microstructure) and plate strips (1D periodic microstructure) are derived. In a numerous calculation cases the consistency of results of both *tolerance modelling* and *asymptotic-tolerance modelling* is shown. Moreover, one can observe, that results of models basing on Winkler's and Murakami's type core can be considered as equal, which proves the correctness of modelling procedures. Eventually, the analysis of influence of certain material properties or geometry of the sandwich structure on its free vibration frequencies is performed and presented on special charts.

Eventually, two verifications of the proposed averaged models are described. In the first one, the application of well-known Ritz method in the vibration analysis of periodic plate strips is presented. As a result, the justification of formulas for lower and higher order free vibrations frequencies is obtained, as well as a physical sense of the obtained results. Secondly, the finite element method is used to verify the free vibration frequencies of periodic three-layered plate calculated within the tolerance averaging technique. All things considered, the proposed models of three-layered

sandwich plates with the periodic microstructure can be regarded as a simple and useful way of determining vibration frequencies of structures with a complicated geometry

STRESZCZENIE

W ostatnich latach, wraz z rozwojem współczesnej techniki, daje się zaobserwować intensywny rozwój inżynierii materiałowej. Możliwość wymodelowania oraz wykonania materiału kompozytowego, zbudowanego z kilku różnych pod względem parametrów materiałowych i wytrzymałościowych materiałów, otworzyło inżynierom drogę do coraz lepszej optymalizacji i przystosowania materiału do pracy w szczególnych warunkach.

Przedmiotem badań opisanych w rozprawie jest analiza dynamiczna struktur (płyt) trójwarstwowych o periodycznie zmiennych własnościach. Płyty trójwarstwowe, zwane też w literaturze "sandwiczowymi", składają się z warstw zewnętrznych, wykonanych z materiałów o wysokiej wytrzymałości, oraz z rozdzielającej je warstwy wewnętrznej, tzw. rdzenia. Wykonany z lekkich, porowatych materiałów rdzeń, poza własnościami izolacyjnymi, ma za zadanie zwiększenie sztywności konstrukcji przez nadanie jej odpowiedniej grubości. W efekcie, uzyskujemy stosunkowo lekką konstrukcję o bardzo wysokiej sztywności oraz dobrych właściwościach izolacyjnych, która może znaleźć zastosowanie w wielu nowoczesnych konstrukcjach inżynierskich.

W literaturze można znaleźć wiele różnych sposobów modelowania struktur sandwiczowych. Jednym z najprostszych, inżynierskich rozwiązań jest rozpatrzenie konstrukcji jako układu dwóch płyt cienkich połączonych ze sobą za pomocą elastycznego, inercyjnego materiału wypełnienia, por. Szcześniak (1998a). W naszych rozważaniach, rdzeń konstrukcji zostanie wymodelowany na dwa różne sposoby: za pomocą warstwy elastycznej typu Winklera oraz z wykorzystaniem materiału sprężystego Murakamiego. W drugim przypadku cały rdzeń zostanie zastąpiony szeregiem jednorodnych prętów o stałych przekrojach wykonujących niezależnie od siebie drgania podłużne, wywołane drganiami warstw zewnętrznych. Rozwiązanie obu modeli jest stosunkowo proste w sytuacji, gdy wszystkie warstwy rozpatrywanej konstrukcji są jednorodne. W przypadku, gdy każda warstwa może mieć periodycznie zmienne (lub nieciągłe) właściwości, zastosowanie powyższych modeli prowadzi do układów równań różniczkowych o periodycznie zmiennych, nieciągłych i silnie oscylujących współczynnikach, którego rozwiązanie może być bardzo trudne.

W celu znalezienia rozwiązania zadanych układów równań zastosowano metodę tolerancyjnego uśredniania, w ramach której przy pewnych założeniach możliwe jest przekształcenie wyjściowego układu równań różniczkowych do postaci o stałych współczynnikach. W przeciwieństwie jednak do znanej metody homogenizacji, tolerancyjne modelowanie pozwala na uwzględnienie oraz zbadanie wpływu mikrostruktury na pracę całej konstrukcji. W pracy wykorzystane zostały dwie procedury modelowania tolerancyjnego: procedura *tolerancyjna* oraz *asymptotyczno-tolerancyjna*. W efekcie, otrzymano cztery różne modele pracy konstrukcji trójwarstwowych.

W szeregu przykładów obliczeniowych przedstawione zostało porównanie częstości drgań własnych uzyskiwanych w ramach różnych modeli zarówno dla płyt jak i dla pasm płytowych o periodycznej budowie. Wykazano zgodność wyników otrzymanych zarówno w ramach dwóch procedur tolerancyjnego modelowania, jak i przy różnych modelach wypełnienia. Dodatkowo zbadano i opisano wpływ zmian pewnych własności materiałowych oraz geometrii warstw zewnętrznych i rdzenia konstrukcji na jej drgania własne.

Poprawność otrzymanych wyników udowodniono przeprowadzając dwie weryfikacje. Wykorzystując znaną metodę Ritza, wykonano przybliżoną analizę drgań płyty metodą energetyczną, w ramach której otrzymano fizyczne i matematyczne uzasadnienie dla dokładnych wzorów opisujących częstości drgań własnych modelu tolerancyjnego. Dodatkowo, wykorzystując metodę

elementów skończonych, w kilku przypadkach obliczeniowych wyznaczono podstawowe częstotliwości drgań własnych periodycznej płyty trójwarstwowej oraz porównano otrzymane wyniki z wynikami modelu tolerancyjnego, uzyskując dobrą zbieżność. Można więc wnioskować, że przedstawione modele płyt trójwarstwowych mogą być wykorzystywane przy analizie drgań konstrukcji o skomplikowanej mikrostrukturze.

Jakub Mawrzak