

Politechnika Łódzka

Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska

Katedra Mechaniki Materiałów

praca doktorska

**ANALIZA NUMERYCZNA WPŁYWU ZBROJENIA
POPRZECZNEGO NA ZACHOWANIE MECHANICZNE
SŁUPA BETONOWEGO**

mgr inż. Artur Kotarski

Promotor pracy:
prof. dr hab. inż. Zdzisław Więckowski

Łódź 2021

Podziękowania

Składam serdeczne podziękowania Promotorowi prof. dr hab. inż. Zdzisławowi Więckowskiemu za poświęcony czas i nieocenioną pomoc w przygotowaniu niniejszej dysertacji.

Artur Kotarski

Spis treści

1. Wstęp	5
1.1. Zjawisko skrępowania betonu	5
1.2. Teza badawcza	7
2. Stan wiedzy	10
2.1. Wprowadzenie	10
2.2. Procedury obliczeniowe	11
2.3. Prace badawcze eksperymentalne	20
2.4. Symulacje numeryczne	31
2.5. Podsumowanie	37
3. Sformułowanie zagadnienia	39
3.1. Przyjęte założenia	39
3.2. Uogólniony płaski stan odkształcenia	41
3.3. Sformułowanie słabe	55
4. Rozwiązanie zagadnienia	57
4.1. Dyskretyzacja zagadnienia	57
4.2. Metoda przyrostowo–iteracyjna	58
4.3. Aktualizacja stanu naprężenia	59
4.4. Opis stosowanych elementów skończonych	60
4.5. Dane materiałowe	73
4.6. Opis zastosowanego oprogramowania	79
5. Przykłady obliczeń	83
5.1. Serie porównawcze z wynikami badań tajwańskich Yin i inni [128, 127]	83
5.2. Przekroje o różnym stopniu zbrojenia (przekroje kwadratowe, prostokątne, okrągłe)	97
5.3. Przekroje o różnych proporcjach długości boków (przekroje prostokątne)	105
5.4. Przekroje kwadratowe o różnym ukształtowaniu zbrojenia poprzecznego	111
5.5. Przekroje o nietypowym kształcie	127
5.6. Podsumowanie	140
6. Podsumowanie	144
A. Dodatek	146
A.1. Definicje	146
A.2. Całkowanie związków konstytutywnych względem czasu metodą jawną	150

A.3. Równania Prandtla–Reussa	154
A.4. Wpływ stałych materiałowych na efektywność skrępowania	156
Spis oznaczeń	165
Spis rysunków	168
Spis tablic	172
Bibliografia	173

1. Wstęp

Rolą inżyniera budowlanego – projektanta konstrukcji jest zapewnienie bezpieczeństwa użytkownika obiektu budowlanego lecz jednocześnie oczekuje się od niego by zaproponowane rozwiązania były możliwie optymalne i oszczędne. Oba te czynniki składają do poszukiwania jak najlepszych rozwiązań napotkanych problemów inżynierskich jak najprostszymi i najefektywniejszymi metodami. Przenosząc to dążenie na etap projektowania i modelowania konstrukcji stajemy przed wyzwaniem zaproponowania możliwie prostego, nieskomplikowanego modelu badanego zjawiska, który jednak będzie opisywał je na tyle dokładnie i precyzyjnie na ile to konieczne. Potrzebny będzie wówczas wybór odpowiednich narzędzi pozwalających w oparciu o przedstawiony model rozwiązać konkretne zadania obliczeniowe i należy zinterpretować wyniki. Ta rozprawa opisuje propozycję takiego uproszczonego modelu przewidzianego do opisu zachowania ściskanego słupa betonowego ze stalowym zbrojeniem poprzecznym o dowolnym kształcie. Przedstawiono w niej ograniczenia i możliwości prezentowanego podejścia, przyjęte założenia, specyfikę zagadnienia betonu skrępowanego, sformułowanie i rozwiązanie omawianego zagadnienia oraz szereg przykładów obliczeniowych, które pokazują działanie modelu oraz zachowanie mechaniczne słupów z uzwojeniem.

1.1. Zjawisko skrępowania betonu

Zastosowanie w ściskanym osiowo przekroju betonowym wkładek z materiału o większej sztywności i wyższych parametrach wytrzymałościowych prowadzi do ograniczenia swobody odkształceń poprzecznych. W konsekwencji prowadzi do zmiany stanu naprężenia z jednorodnego jednoosiowego ściskania w stan trójosiowego ściskania. Pozwala to uzyskać wyższe wartości bezwzględne naprężeń wzdłuż osi słupa przed jego zniszczeniem i ostatecznie przenosić większe siły normalne przy niższym zużyciu betonu. Z tego powodu zjawisko skrępowania rdzenia betonowego jest tematem zainteresowania inżynierów i badaczy niemal od początków XX w. Od tego czasu zbadano wiele aspektów tego zjawiska, znajdując przy tym różne obszary, gdzie stosowanie uzwojenia jest szczególnie wskazane.

Początkowo temat budził zainteresowanie ze względu na oszczędności jakie mogło przynieść to rozwiązanie. Pierwsze modele wskazywały, że zwiększanie ilości zbrojenia poprzecznego jest kilkukrotnie wydajniejsze niż stosowanie wkładek podłużnych. Aspekt ten nigdy nie przestał mieć znaczenia, choć w dobie stosowania w elementach ściska-

nych betonów wysokiej wytrzymałości zyski te mogą być mocno ograniczone. Niemniej są sytuacje, gdzie trud włożony w precyzyjne określenie nośności słupa żelbetowego ze zbrojeniem tradycyjnym jest szczególnie istotny. Dotyczy to zwłaszcza adaptacji obiektów przy zmianie sposobu ich użytkowania, gdzie przez dokładniejsze modelowanie możliwe jest wykorzystanie pozostających rezerw nośności i zwiększenie dopuszczalnego obciążenia bez konieczności ingerowania w konstrukcję.

Drugi aspekt wykorzystania zjawiska skrępowania to projektowanie wzmocnień istniejących słupów przy wykorzystaniu poprzecznego zbrojenia zewnętrznego. Widoczne są tu dwa podstawowe nurty związane z wykorzystaną technologią: stosowanie płaszczy z mat FRP (ang. *fiber reinforced polymer*) zwykle jako zbrojenie pasywne oraz wzmocnienie techniką SSTT (ang. *steel-straps tensioning technique*) czyli napinanych prasą lub śrubami taśm stalowych pełniących funkcję aktywnego zbrojenia poprzecznego. Takie metody pozwalają uzyskać znaczne przyrosty nośności przy małej ingerencji w istniejącą konstrukcję i nie wymuszają zmiany schematów statycznych, a przy tym prawie nie zmieniają istniejących wymiarów zewnętrznych wzmocnianych słupów.

Wśród innych obszarów inżynierii lądowej, w których zjawisko skrępowania rdzenia betonowego znalazło zastosowanie, należy wymienić elementy rurobotonowe (ang. CFST – *concrete filled steel tube*). Dzięki temu połączeniu rdzeń betonowy ma ograniczoną zdolność do odkształceń poprzecznych i jest w stanie przenosić siły osiowe nawet przy pełnym uplastycznieniu, zaś płaszcz stalowy jest stabilizowany przez rdzeń i ograniczona jest jego wrażliwość na lokalną utratę stateczności. Dodatkowo wypełnienie betonowe zapewnia trwałą ochronę antykorozyjną wewnętrznej powierzchni rury, a płaszcz ułatwia betonowanie stanowiąc rodzaj traconego deskowania. Taka konstrukcja zespolona charakteryzuje się ponadto wieloma pożądanymi cechami: wysoką nośnością na ściskanie osiowe, ale również mimośrodowe, dużą odkształcalnością w stanie granicznym, która zapobiega gwałtownemu zniszczeniu i powstawaniu katastrofy postępującej. Minusem jest niska odporność pożarowa wymuszająca stosowanie dodatkowych środków ochronnych, gdy to konieczne. Być może z tego względu oraz z powodu większych trudności związanych z konstruowaniem węzłów rozwiązanie to nie upowszechniło się na tyle by zastąpić tradycyjne słupy żelbetowe.

Innym sposobem ograniczenia odkształceń poprzecznych w betonie jest stosowanie zbrojenia rozproszonego. Wykorzystuje się do tego celu włókna stalowe, polipropylenowe i polimerowe. Ta metoda modyfikuje właściwości betonu na poziomie makrostruktury. Największe włókna – stalowe – mają wymiar 50 ± 5 mm, pozostałe – rzędem wielkości nie odbiegają od wymiarów ziarna stosowanych kruszyw. Z tego względu (skala oraz losowy rozkład zbrojenia) beton ze zbrojeniem rozproszonym pozostaje poza głównym tematem pracy.

Betonowe słupy uzwojone oraz rurobotonowe znalazły szczególnie zastosowanie tam, gdzie konieczne jest projektowanie z uwzględnieniem oddziaływań sejsmicznych oraz

obciążeń wyjątkowych, gdyż mają wyższą odkształcalność w zakresie plastycznym oraz zdolność akumulacji większej całkowitej energii odkształcenia w stosunku do tradycyjnych słupów żelbetowych. Najczęstsze tematy krytyki betonu skrępowanego dotyczą następujących zagadnień: skuteczność zbrojenia poprzecznego w zakresie obciążeń użytkowych, ograniczenia dotyczące smukłości i mimośrodów, wpływ procesów reologicznych na pracę mechaniczną słupa.

W ostatnich latach główny wysiłek naukowców zajmujących się betonem skrępowanym dotyczył badania konstrukcji pod obciążeniami sejsmicznymi, sposobów i efektywności krępowania betonów wysokich wytrzymałości oraz stosowania włókien z tworzyw sztucznych w zbrojeniu i we wzmacnianiu słupów betonowych.

1.2. Teza badawcza

Poruszony w pracy problem badawczy dotyczy określenia nośności betonowego przekroju skrępowanego stalowym zbrojeniem poprzecznym o dowolnym kształcie na drodze symulacji numerycznej. Aby skutecznie poradzić sobie z takim zagadnieniem przeanalizowano specyfikę rozważanego zjawiska oraz dotychczas stosowane sposoby jego opisu. Na tej podstawie przyjęto początkowe założenia dotyczące prezentowanego rozwiązania.

Wybrano zastosowanie modelu dwuwymiarowego, który reprezentuje przekrój poprzeczny słupa o jednostkowej grubości. Jest to równoznaczne z przyjęciem zasady de'Saint-Venanta, która przy pominięciu zaburzeń w obszarze głowic pozwala zastąpić przestrzenną analizę całego elementu wykorzystaniem zagadnienia uogólnionego płaskiego stanu odkształcenia. W takim podejściu odkształcenie prostopadłe do płaszczyzny przekroju oznacza skrócenie podłużne słupa spowodowane działaniem siły osiowej i stanowi obciążenie kinematyczne. Rozwiązanie jest poszukiwane przez wyznaczenie – w kolejnych krokach obciążenia – pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń. Całkowanie naprężeń prostopadłych do przekroju pozwala wyznaczyć siłę osiową w betonowym rdzeniu i określić jego nośność. Taki sposób rozwiązania sprawia, że potrzebne jest przyjęcie zasady rozmycia zbrojenia poprzecznego wzdłuż wysokości słupa. Jak pokazuje analiza dostępnego w piśmiennictwie materiału sam obszar głowic jest najtrwalszą częścią słupów nawet przy braku stosowania dodatkowego zbrojenia wzmacniającego, głównie za sprawą ograniczenia odkształceń przez elementy dochodzące.

W celu uchwycenia zjawiska w sposób zbliżony do rzeczywistości konieczne jest wprowadzenie nieliniowości fizycznej materiału. Przyjęto sprężysto-plastyczne modele materiałowe zarówno dla stali jak i betonu. W przypadku uzwojenia wykorzystywany jest warunek plastyczności Hubera–Misesa–Hencky'ego, zaś w odniesieniu do betonu zastosowane są trzy warianty obejmujące odpowiednio kryterium Mohra–Coulomba, Druckera–Pragera i Willama–Warnkego. W dwóch pierwszych modelach odkształcenia plastyczne wyznacza się, stosując niestowarzyszone prawo płynięcia.

Prezentowane zadanie rozwiązano metodą elementów skończonych w ujęciu przemieszczeniowym. Podstawowymi niewiadomymi układu są przemieszczenia węzłów w płaszczyźnie przekroju – po 2 stopnie swobody w węźle. Obszar rdzenia zdyskretyzowano sześciowęzłowymi elementami trójkątnymi klasy C^0 , a zbrojenie poprzeczne elementami prętowymi trójwęzłowymi klasy C^0 , które przenoszą wyłącznie siłę osiową. Rozważono wykorzystanie elementów trójkątnych trójwęzłowych w połączeniu z prętowymi dwuwęzłowymi – obydwie klasy C^0 , ale nie wykorzystano ich w przykładach obliczeniowych prezentowanych w dysertacji.

Postanowiono ograniczyć uniwersalność przedstawionego modelu w celu uzyskania jego efektywności, zapewniając jednocześnie jego przydatność we wszystkich przypadkach, w których wpływ zbrojenia poprzecznego na zachowanie słupa betonowego jest zauważalnie istotny. Zarazem przyjęto za cel umożliwienie symulacji nośności słupa o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego z dowolnie skonstruowanym zbrojeniem krępowującym. Jest to element, którego brakuje w prostych procedurach projektowych wywodzących się głównie z badań doświadczalnych. Z kolei trójwymiarowa analiza takich zadań przy wykorzystaniu bardziej zaawansowanych narzędzi wymaga znacznie więcej wysiłku włożonego w przygotowanie modeli obliczeniowych i dłuższego czasu obliczeń. W związku z tym założono, że przedstawione w dysertacji rozwiązanie powinno być stosowane do symulowania krępych słupów poddanych ścisłaniu osiowemu i wykonanych z betonów normalnej wytrzymałości, ze zbrojeniem metalicznym (stalowym). Te restrykcje właściwie pokrywają się z obserwacjami dotyczącymi efektywnego wykorzystania uzwojenia. Zaobserwowano, że w słupach poddawanych ścisłaniu na mimośrodku na granicy rdzenia przekroju oraz o smukłości $\lambda > 20$ szybko dochodzi do zaniku zauważalnego wpływu skrupowania. W przypadku uzwojenia słupów wykonanych z betonów wysokich wytrzymałości ich duża sztywność i proporcjonalnie mniejsza odkształcalność poprzeczna sprawiają, że krępowanie ich stałą jest mniej wydajne, za to uwydatniają się zjawiska, których nie obserwowano w badaniach próbek wykonanych ze słabszych betonów, takie jak na przykład eksplozyjne odpryskiwanie spowodowane wyboczeniem prętów zbrojenia głównego. Dodatkowo w opisanym modelu obliczeniowym przyjęto ciągłość odkształceń pomiędzy wszystkimi elementami. Oznacza to, że nie uwzględniono możliwego poślizgu na styku zbrojenia z rdzeniem betonowym. Przybliżenie bardzo dobrze sprawdza się w przypadku ciągłych dobrze zakotwionych strzemion lub zwojów.

Podsumowując – celem pracy jest przedstawienie i przetestowanie modelu, który w przypadku betonu skrupowanego stalowym uzwojeniem pozwala określić nośność graniczną przekroju, jego sztywność osiową oraz rozkład naprężenia na jego powierzchni. Prezentowane rozwiązanie ma łączyć prostotę i przejrzystość dwuwymiarowego zadania, swobodę projektowania kształtu przekroju i zbrojenia poprzecznego z zadowalającą dokładnością rozwiązania, co uczyni je potencjalnie przydatnym w praktyce inżynierskiej.

Tezą pracy jest: przyjęte i przedstawione założenia pozwalają w pełni zrealizować cel pracy, a wyniki obliczeń wykonanych z wykorzystaniem opracowanego modelu mogą być wiarygodnym źródłem informacji o nośności przekroju uzwojonego słupa betonowego.

2. Stan wiedzy

2.1. Wprowadzenie

Koncepcja zastosowania uzwojenia słupa betonowego w celu poprawy jego właściwości mechanicznych po raz pierwszy pojawiła w początkach XX w. Można by zatem podejrzewać, że przez ponad wiek zjawisko skrępowania betonu zostało na tyle dogłębnie zbadane i opisane, że nie będzie obecnie żywym tematem współczesnych badań. Niemniej przegląd dostępnych źródeł pokazuje, iż zagadnienie to wciąż zajmuje badaczy w różnych częściach świata. Kolejne fale zainteresowania tematem spowodowane są po części rozwojem inżynierii materiałowej (zastosowanie stali utwardzanych jako wkładki zbrojeniowych, rozwój betonów wysokich wytrzymałości, wprowadzenie włókien z tworzyw sztucznych do zastosowania w budownictwie), wdrażaniem nowych, czasem istniejących wcześniej na małą skalę koncepcji konstruowania ustrojów budowlanych (słupy typu CFST, próby uzwojenia krzyżulców ściskanych krótkich wsporników betonowych, wzmacnianie elementów ściskanych płaszczami zewnętrznymi), czasem także w wyniku analizy przyczyn i skutków katastrof budowlanych i poszukiwanie prób zapobiegania im w przyszłości (trzęsienie ziemi w San Fernando).

Przeгляд literatury podzielono na trzy części. W pierwszej zaprezentowano kilka spośród stosowanych powszechnie procedur obliczania nośności słupów ze zbrojeniem poprzecznym. Przedstawiono propozycje normowe stanowiące konsensus pewnych środowisk naukowo-technicznych oraz kilka propozycji niezależnych, będących często efektem analizy prac badawczych. Podpunkt ten kończy się zbiorczym zestawieniem ponad 30 prac opisujących wpływ zbrojenia poprzecznego na zachowanie mechaniczne słupa betonowego, które powstały na przestrzeni kilkudziesięciu lat, od momentu gdy zaczęto badać to zjawisko. Kolejna część zestawia krótkie omówienie prac badawczych, prowadzonych w różnych okresach, wraz z przywołaniem głównych konkluzji istotnych dla tematu niniejszego opracowania. Prace rozdzielono według ośrodków prowadzących badania. Pozycje starano dobrać się tak by oddawały różne aspekty zjawiska skrępowania betonu, a także reprezentowały różne ośrodki badawcze i przekrój czasowy, z uwzględnieniem wysiłków polskich naukowców. Ostatnia część to spojrzenie na koncepcje modelowania i symulacji zjawiska skrępowania betonu, stosowane modele konstytutywne, metody obliczeniowe. Część przeglądu stanu wiedzy, która nie dotyczyła bezpośrednio zjawiska skrępowania betonu i słupów uzwojonych a poszczególnych zagadnień związanych z budowaniem modelu obliczeniowego została umieszczona w poszczególnych rozdziałach.

Celem przeprowadzonego przeglądu literatury było ustalenie obszaru wiedzy wymagającego uwagi, zaznajomienie się z dotychczas stosowanymi metodami poznawczymi oraz zebranie danych niezbędnych do samodzielnego zbudowania modelu obliczeniowego i jego weryfikacji. Pozycje cytowane, które napisane były w językach francuskim, niemieckim, rosyjskim, tureckim i japońskim znane są autorowi bądź z opracowań przeglądowych (m.in. [7, 17, 20, 41, 54, 83]), bądź z dostępnych tłumaczeń wydanych w języku polskim lub angielskim. Cytowanie oryginalnych prac ma w tym przypadku na celu oddanie należnego miejsca twórcom teorii i badań, z dorobku których korzystano przygotowując tę dysertację. Oznaczenia wielkości fizycznych i matematycznych stosowane w tej części pracy najczęściej zaczerpnięte są z przywoływanych pozycji i mogą różnić się między sobą lecz są opisane w tekście. W przypadku porównań różnych metod określania nośności stosowane są ujednolicenia dla zachowania większej przejrzystości.

2.2. Procedury obliczeniowe

PN-EN-1992-1-1 Projektowanie konstrukcji z betonu. Reguły ogólne i reguły dla budynków (EUROCODE 2)

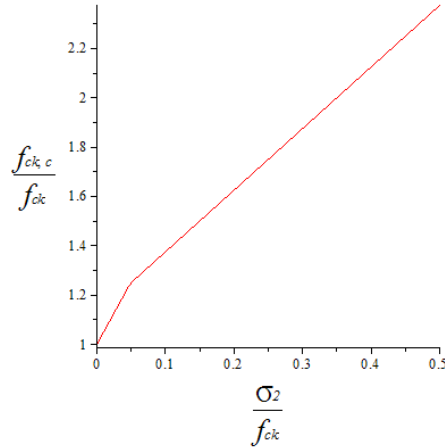
Norma [33] w punkcie 3.1.9 porusza kwestię projektowania nośności elementu konstrukcji wykonanego z betonu skrępowanego. W podpunkcie (1) czytamy: „Na skutek ograniczenia odkształceń poprzecznych (...) beton osiąga większą wytrzymałość i większe krytyczne odkształcenia”. Dalej precyzuje, że efekt skrępowania można uwzględnić modyfikując niektóre parametry wytrzymałościowe betonu, a dalej obliczać nośność tak jak w przypadku pracy w stanie jednoosiowego ściskania

$$f_{ck,c} = f_{ck} \left(1,0 + 5,0 \frac{\sigma_2}{f_{ck}} \right) \quad \text{dla } \sigma_2 \leq 0,05 f_{ck}, \quad (2.1)$$

$$f_{ck,c} = f_{ck} \left(1,125 + 2,5 \frac{\sigma_2}{f_{ck}} \right) \quad \text{dla } \sigma_2 > 0,05 f_{ck}, \quad (2.2)$$

gdzie $f_{ck,c}$ oznacza wytrzymałość charakterystyczną betonu skrępowanego na ściskanie, f_{ck} wytrzymałość charakterystyczną przed na ściskanie bez skrępowania, a σ_2 krępujące naprężenia poprzeczne w betonie. Na rys. 2.1 przedstawiono na wykresie znormalizowaną względem początkowej wartości wytrzymałość osiową w funkcji naprężeń poprzecznych.

Kolejne parametry podlegające modyfikacji to graniczne odkształcenia betonu: ε_{c2} , które zastępowane jest przez $\varepsilon_{c2,c}$ oraz ε_{cu2} zastępowany przez $\varepsilon_{cu2,c}$. W modelu paraboliczno–liniowym zalecanym do stosowania w punkcie 3.1.7 normy [33] pierwsze z wymienionych odkształceń granicznych oznacza punkt osiągnięcia przez materiał granicy plastyczności i przejście do stanu idealnej plastyczności, zaś drugie całkowite graniczne odkształcenie materiału, po osiągnięciu którego następuje zniszczenie przekroju



Rysunek 2.1: Znormalizowana wytrzymałość betonu skrępowanego na ściskanie wg [33].

$$\varepsilon_{c2,c} = \varepsilon_{c2} \left(\frac{f_{ck,c}}{f_{ck}} \right)^2, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{cu2,c} = \varepsilon_{cu2} + 0,2 \left(\frac{\sigma_2}{f_{ck}} \right). \quad (2.4)$$

W powyższych formułach kluczowe jest ustalenie wartości efektywnych poprzecznych naprężeń ściskających σ_2 . Norma [33] nie podaje wprost sposobu ich określenia na podstawie geometrii przekroju, rodzaju zbrojenia, ani właściwości użytych materiałów. Zwraca jedynie uwagę, że: „Ograniczenie odkształceń (skrępowanie betonu) może być generowane przez odpowiednie zamknięte strzemiona lub krzyżowe powiązania zbrojeniem, które dzięki poprzecznemu wydłużeniu betonu osiągają stan plastyczny.” Wobec powyższego stwierdzenia konieczne jest przeprowadzenie dodatkowej analizy naprężeń normalnych w płaszczyźnie przekroju. Model wprowadzony do normy PN-EN-1992-1-1 bazuje w dużej mierze na wynikach Mandera z 1988 roku [64].

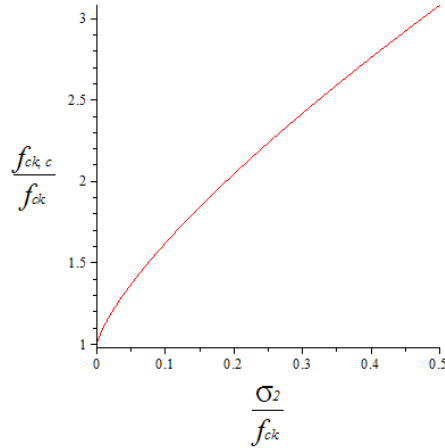
fib Bulletin 66: MODEL CODE 2010

Publikacja [51] traktuje zjawisko skrępowania betonu, podobnie jak [33], proponując modyfikację parametrów wytrzymałościowych betonu wskutek działania zbrojenia poprzecznego

$$\frac{f_{ck,c}}{f_{ck}} = 1 + 3,5 \left(\frac{\sigma_2}{f_{ck}} \right)^{\frac{3}{4}}, \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{c2,c} = \varepsilon_{c2} \left[1 + 5 \left(\frac{f_{ck,c}}{f_{ck}} - 1 \right) \right], \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{cu2,c} = \varepsilon_{cu2} + 0,2 \left(\frac{\sigma_2}{f_{ck}} \right). \quad (2.7)$$



Rysunek 2.2: Znormalizowana wytrzymałość betonu skrępowanego na ściskanie wg [51].

Porównując rys. 2.1 i 2.2 możemy zauważyć, że prezentowana w tym punkcie procedura jest mniej zachowawcza od poprzedniej. Dodatkowo w dalszej części opracowania [51] znajduje się propozycja obliczania wartości naprężeń poprzecznych σ_2 w przypadku przekrojów okrągłych zbrojonych okrągłymi strzemionami lub zwojem oraz prostokątnych ze zbrojeniem prostym ze strzemion dwuciętych oraz wielociętych.

Naprężenia poprzeczne krępujące należy obliczać według wzorów:

$$\sigma_2 = \omega_c f_{cd} \left(1 - \frac{s_c}{d_c} \right), \quad (2.8)$$

dla przekroju okrągłego zbrojonego poprzecznie ciągłym zwojem;

$$\sigma_2 = \omega_c f_{cd} \left(1 - \frac{s_c}{d_c} \right)^2, \quad (2.9)$$

dla przekroju okrągłego zbrojonego poprzecznie okrągłymi strzemionami;

$$\sigma_2 = \omega_c f_{cd} \left(1 - \frac{s_c}{a_c} \right) \left(1 - \frac{s_c}{b_c} \right) \left(1 - \frac{\sum b_i^2/6}{a_c b_c} \right), \quad (2.10)$$

dla przekrojów prostokątnych zbrojonych strzemionami.

W podanych powyżej wzorach zastosowane są następujące oznaczenia:

ω_c – moc zbrojenia poprzecznego;

s_c – rozstaw strzemion lub skok zwoju;

d_c – średnica rdzenia przekroju (powierzchni zamkniętej wewnątrz linii środkowych zbrojenia poprzecznego);

a_c – krótszy bok rdzenia przekroju;

b_c – dłuższy bok rdzenia przekroju;

b_i – odległość pomiędzy kolejnymi prętami zbrojenia podłużnego przytrzymywanymi przez naroża strzemion lub wiązania krzyżowe;

f_{cd} – obliczeniowa wytrzymałość betonu na ściskanie (granica plastyczności pomnożona przez współczynnik bezpieczeństwa).

Moc zbrojenia obliczana jest odpowiednio dla przekrojów okrągłych oraz prostokątnych jako:

$$\omega_c = \frac{A_{sc} f_{yd}}{s_c d_c f_{cd}}, \quad (2.11)$$

$$\omega_c = \min \left\{ \omega_y = \frac{A_{sy} f_{yd}}{s_c a_c f_{cd}}, \omega_z = \frac{A_{sz} f_{yd}}{s_c b_c f_{cd}} \right\}, \quad (2.12)$$

gdzie:

f_{yd} – obliczeniowa granica plastyczności stali zbrojenia poprzecznego;

A_{sc} , A_{sy} , A_{sz} – pole przekroju zbrojenia poprzecznego w danym przekroju (np. dla strzemion dwuciętych jest to podwojone pole przekroju pręta strzemienia).

Procedura nie jest przewidziana do stosowania dla przekrojów o innym kształcie lub innym zbrojeniu poprzecznym niż opisane.

ACI 318-8 Building Code Requirements for Structural Concrete

Amerykański Instytut Betonu w prezentowanej normie [1, 2] skupia się głównie na warunkach, jakie spełniać powinien element betonowy, by traktować go jako uzwojony. Do samego obliczania nośności przekroju skrępowanego proponowany jest wzór opracowany przez ACI we współpracy z Uniwersytetem Illinois (patrz też [97]):

$$f_{cc} = 0,85f'_c + 4,1f_1, \quad (2.13)$$

gdzie:

f'_c – wytrzymałość betonu nieskrępowanego,

f_1 – naprężenie poprzeczne.

W literaturze powiązanej z obszarem stosowania norm amerykańskich można znaleźć formuły, wyprowadzone z prostych modeli, które pozwalają łatwo obliczyć naprężenia poprzeczne w typowych przypadkach [85, 116] np.:

dla słupów o przekroju kołowym:

$$f_1 = \frac{2A_{sh} f_{yt}}{s_c d_c}, \quad (2.14)$$

dla słupów kwadratowych ze strzemionami 4-ciętymi:

$$f_1 = \frac{4A_{sh} f_{yt}}{s_c b_c}, \quad (2.15)$$

dla słupa kwadratowego ze strzemionami oplatającymi rdzeń oraz ułożonymi po kątem 45° , które przytrzymują pręty na bokach przekroju:

$$f_1 = \frac{3,41A_{sh}f_{yt}}{s_c b_c}. \quad (2.16)$$

We wzorach powyższych A_{sh} oznacza pole przekroju pręta zwoju lub strzemiona, s_c skok uzwojenia, a d_c i b_c odpowiednio średnicę i długość boku rdzenia przekroju.

Warunki, jakie musi zgodnie z normą ACI318 [2] spełniać przekrój, są następujące:

1. Wymagany stopień zbrojenia poprzecznego ρ_T przekrojów kołowych:

$$\rho_T \geq 0,45 \left(\frac{A_c}{A_{ch}} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_{yt}}, \quad (2.17)$$

co jest adaptacją wzoru (2.26) przedstawionego w pracy [98] oraz:

$$\rho_T \geq 0,12 \frac{f'_c}{f_{yt}}. \quad (2.18)$$

2. Wymagany stopień zbrojenia poprzecznego przekrojów prostokątnych:

$$\rho_T \geq 0,3 \left(\frac{A_g}{A_{ch}} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_{yt}}, \quad (2.19)$$

$$\rho_T \geq 0,09 \frac{f'_c}{f_{yt}}, \quad (2.20)$$

gdzie A_g oznacza pole powierzchni całego przekroju, zaś A_{ch} pole przekroju pręta uzwojenia. Dodatkowo stawiane są warunki dotyczące maksymalnego rozstawu prętów (skoku uzwojenia) oraz mimośrodów. Maksymalny skok s_x nie może przekraczać:

$s_x \leq 1/4$ średnicy (długości boku) słupa,

$s_x \leq 1/6$ średnicy (długości boku) skrępowanego rdzenia przekroju,

dla przekrojów prostokątnych dodatkowo $s_x \leq 4 + \left(\frac{14-h_x}{3}\right)$. Wymiary podano w calach, a h_x jest maksymalną odległością między przytrzymałymi przez zbrojenie poprzeczne prętami podłużnymi.

Richart i inni (1929, 1934)

Rozwój budownictwa betonowego w końcu XIX wieku skłaniał badaczy i inżynierów do opracowania uniwersalnych procedur projektowych. Początkowo (jak na przykład w raporcie [50] z roku 1910.) nie uwzględniano wpływu zbrojenia poprzecznego na zachowanie mechaniczne betonowych słupów zbrojonych. Jedną z pierwszych historycznie prac [97], do której udało się dotrzeć autorowi dysertacji, przedstawiająca systematyczne podejście do zagadnienia nośności słupów uzwojonych podaje, że nośność betonu wewnątrz rdzenia można obliczać jako:

$$f_1 = f'_c + 4,1f_2, \quad (2.21)$$

gdzie:

f_1 – wytrzymałość osiowa betonu skrępowanego, która odpowiada wcześniej stosowanemu oznaczeniu $f_{ck,c}$;

f'_c – wytrzymałość betonu nieskrępowanego – odpowiada f_{ck} ;

f_2 – naprężenia poprzeczne – odpowiada σ_2 ;

Dla słupów cylindrycznych z obwodowym zbrojeniem dodatkowo podano wzory:

$$f_2 = \frac{\rho_T f_s}{2}, \quad (2.22)$$

$$f_1 = f'_c + 2,05\rho_T f_s, \quad (2.23)$$

gdzie ρ_T oznacza stopień zbrojenia poprzecznego, a f_s naprężenia w stali odpowiadające granicy plastyczności.

W drugiej części badań autorzy korygują wcześniejsze ustalenia proponując obliczać maksymalną siłę osiową P w przekroju betonowym zbrojonym następująco:

$$\frac{P}{A_c} = C f'_c (1 - \rho) + \rho f_y + k \rho_T f_s, \quad (2.24)$$

lub:

$$\frac{P}{A_g} = C f'_c (1 - \rho) + \rho f_y, \quad (2.25)$$

gdzie:

A_c – pole powierzchni rdzenia przekroju;

A_g – pole całkowite przekroju;

ρ, ρ_T – stopień zbrojenia głównego i poprzecznego;

f_y, f_s – granica plastyczności stali zbrojenia głównego i uzwojenia;

C – współczynnik o stałej wartości $C = 0,85$;

k – współczynnik o wartości od 1,5 do 2,5, zalecane przyjmowanie $k = 2,0$.

Drugi z wymienionych wzorów należy stosować dla przekrojów o grubych otulinach, gdy do zniszczenia przekrojów dochodzi przed odpryskiwaniem otuliny (ang. *spalling*). Kryterium minimalnego stopnia zbrojenia, które pozwala stosować wzór (2.24) jest następujące:

$$\rho_T = 0,425 \frac{f'_c}{f_s} \frac{A_g - A_c}{A_c}. \quad (2.26)$$

Poza wymienionymi formułami w pracy [98] znajdujemy proponowany sposób przyjmowania materiałowych współczynników bezpieczeństwa oraz podstawowe zalecenia konstrukcyjne.

Saatcioglu i Razvi (1992, 1999)

Wspomniani autorzy przez kilka lat prowadzili wspólne prace, których efektem były między innymi publikacje [103, 93]. W pierwszej przedstawiają model pozwalający określać nośność dla słupów uzwojonych wykonanych z betonu zwykłego. W dalszej pracy wskazują modyfikacje pierwotnego modelu, które pozwalają go zastosować do elementów z betonów wysokiej wytrzymałości. Metoda została opracowana na podstawie wyników badań doświadczalnych dla przekrojów okrągłych, kwadratowych i prostokątnych.

Wytrzymałość osiowa betonu skrępowanego wewnątrz rdzenia wyrażona jest następująco:

$$f'_{cc} = f'_{co} + k_1 f_{le}, \quad (2.27)$$

$$k_1 = 6,7 (f_{le})^{-0,17}, \quad (2.28)$$

$$f_{le} = k_2 f_1, \quad (2.29)$$

$$f_1 = \frac{\sum_{i=1}^q (A_s f_s \sin \alpha)_i}{s b_c}, \quad (2.30)$$

gdzie:

f'_{cc} – wytrzymałość betonu skrępowanego, co odpowiada wcześniej stosowanemu oznaczeniu $f_{ck,c}$;

f'_{co} – wytrzymałość betonu nieskrępowanego, co odpowiada f_{ck} ;

f_{le} – efektywne naprężenia poprzeczne, co odpowiada σ_2 ;

f_1 – średnie naprężenia poprzeczne;

k_1 – współczynnik efektywności skrępowania;

k_2 – współczynnik redukcyjny obszaru efektywnie skrępowanego klatką zbrojenia.

A_{si} – pole przekroju i -tego pręta zbrojenia poprzecznego;

f_s – naprężenia rozciągające w stali i -tego pręta przy szczytowym naprężeniu osiowym w rdzeniu przekroju, dla betonów zwykłych i stali węglowych może być przyjmowane jako granica plastyczności stali, dla materiałów wysokich wytrzymałości granica ta może zostać nieosiągnięta (omówiono tę wartość w dalszej części);

s – skok uzwojenia;

b_c – średnica rdzenia lub dłuższy bok rdzenia prostokątnego;

q – liczba prętów zbrojenia poprzecznego przecięta przekrojem wzdłuż średnicy lub krawędzi rdzenia;

α – kąt między przeciętym prętem zbrojenia poprzecznego a powierzchnią przekroju.

Wartość współczynnika k_2 dla betonów zwykłych pierwotnie zalecano obliczać ze wzoru:

$$k_2 = 0,26 \sqrt{\left(\frac{b_c}{s}\right) \left(\frac{b_c}{s_1}\right) \left(\frac{1}{f_1}\right)} \leq 1,0, \quad (2.31)$$

gdzie s_1 oznacza rozstaw między prętami zbrojenia głównego.

W przypadku stosowania betonów wysokiej wytrzymałości autorzy zmodyfikowali wzór (2.31) jednocześnie dopuszczając go do stosowania dla wszystkich betonów:

$$k_2 = 0,15 \sqrt{\left(\frac{b_c}{s}\right) \left(\frac{b_c}{s_1}\right)} \leq 1,0. \quad (2.32)$$

W przypadku przekrojów prostokątnych wskazano, by obliczać wytrzymałość zastępując równanie (2.29) następującym:

$$f_{le} = \frac{f_{lex} b_{cx} + f_{ley} b_{cy}}{b_{cx} + b_{cy}}. \quad (2.33)$$

Poszczególne składniki oznaczone indeksami x oraz y oblicza się według pierwotnego równania, oddzielnie dla obydwu kierunków.

Naprężenie w zbrojeniu poprzecznym należy obliczać jako:

$$f_s = E_s \left(0,0025 + 0,04 \sqrt[3]{\frac{k_2 \rho_c}{f'_{co}}} \right) \leq f_{yt}, \quad (2.34)$$

gdzie przez ρ_c rozumiany jest stopień zbrojenia poprzecznego. Dodatkowo autorzy zastrzegają, że wzór jest poprawny dla stali o wytrzymałości $f_{yt} \leq 1400$ MPa.

Poza obliczaniem nośności, w pracach [103, 93] możemy znaleźć sposób obliczania odkształceń odpowiadających maksymalnym wartościom naprężeń w rdzeniu oraz odpowiadających całkowitemu zniszczeniu, a także wartości modułu Younga w poszczególnych fazach pracy przekroju.

El-Dash, Ahmad (1994)

Autorzy z Karoliny Północnej prezentują podejście, które ma opisać relację naprężenie–odkształcenie w całym zakresie pracy przekroju przy użyciu jednej funkcji. Dodatkowo, przez wprowadzenie do niej kilku parametrów, ma ona pozwalać na aproksymację tej relacji tak dla betonów o normalnych, jak i wysokich wytrzymałościach. Ponadto w pracy [30] przedstawiono zastosowanie proponowanej funkcji w przypadku przekrojów prostokątnych ze strzemiionami wielociętymi z różnym stopniem zbrojenia poprzecznego w dwóch kierunkach.

Ogólną postać funkcji naprężenie–odkształcenie zaproponowano w postaci:

$$y = \frac{Ax + (B - 1)x^2}{1 + (A - 2)x + Bx^2}, \quad (2.35)$$

gdzie:

$y = f_c/f_{cc}$ – stosunek naprężeń w danym punkcie do maksymalnej wartości (wytrzymałości betonu skrupowanego);

$x = \varepsilon_c/\varepsilon_{cc}$ – stosunek odkształcenia w danym punkcie do odkształcenia odpowiadającego wytrzymałości f_{cc} ;

$A = \frac{E_c \varepsilon_{cc}}{f_{cc}}$ – parametr sztywności początkowej, E_c jest modułem Younga dla betonu określonym wg ACI [1];

$B = 130,9(\rho_{se})^{0,3} \left[\frac{f_y}{(f_{c0})^{2,5}} \right]$ – parametr definiujący za kształt opisywanej relacji po osiągnięciu maksimum (przy wyższych wartościach odkształceń).

Nośność przekroju skrupowanego określono jako:

$$f_{cc} = f_{c0} + k_1 f_1, \quad (2.36)$$

gdzie f_{c0} jest wytrzymałością betonu nieskrupowanego, f_1 efektywnym naprężeniem poprzecznym, a k_1 parametrem zależnym od geometrii i własności materiałowych. Odpowiednio $f_1 = \rho_{se} f_y$, gdzie f_y jest granicą plastyczności zbrojenia, zaś ρ_{se} równoważnym (średnio ważonym) stopniem zbrojenia poprzecznego. Parametr

$$k_1 = 0,7 \left(\frac{f_{c0}}{f_y} \frac{m}{\rho_{se}} \right)^{0,2}, \quad (2.37)$$

zależy dodatkowo od mnożnika efektywności $m = \frac{b_x}{s_{bx}} \frac{b_y}{s_{by}} \frac{b_x}{s} \frac{b_y}{s}$, gdzie b_x i b_y są długościami boków przekroju, s_{bx} i s_{by} odległościami między prętami pionowymi w poszczególnych kierunkach, a s skokiem uzwojenia (rozstawem strzemion).

Lignola, Prota, Manfredi i inni (2011)

Powyższa praca [58] dotyczy skrupowania betonowych przekrojów prostokątnych zewnętrznym płaszczem z włókien polimerowych. W zakresie zachowania się rdzenia betonowego zawiera uniwersalne uwagi opisujące zjawisko. Autorzy dowodzą, że dla przekrojów prostokątnych obszar efektywnie skrupowany (w przypadku zastosowania wyłącznie zbrojenia na obwodzie) nie ogranicza się do stref w pobliżu krótszych boków, ale rozciąga się w całym przekroju wzdłuż przekątnych, zakładając w praktyce stan dwuosowego ściskania. Następnie wykorzystując hipotezę wyteżenia Willama–Warnkego proponują następujący sposób wyrażenia nośności rdzenia:

$$\frac{f_{cc}}{f_{c0}} = 1 + 1,42 \frac{f_1}{f_{c0}} - 1,40 \left(\frac{f_1}{f_{c0}} \right)^2 + 0,30 \left(\frac{f_1}{f_{c0}} \right)^3, \quad (2.38)$$

gdzie f_1 oznacza średnie naprężenie poprzeczne działające na krótszy bok prostokąta oznaczony jako b , obliczane w prosty sposób:

$$f_1 = 2 \frac{t_{\text{frp}} E_{\text{frp}} \varepsilon_{\text{frp}}}{b}. \quad (2.39)$$

Wzór ten odpowiada średnim naprężeniom wywołanym przez uzwojenie przy zastosowaniu zbrojenia tradycyjnego, jakie stosowane są w innych procedurach.

Zestawienie

Po ujednoczeniu oznaczeń i formy proponowane metody obliczania wytrzymałości skrępowanego rdzenia betonowego zaprezentowano w poniższych tab. 2.1, 2.2, 2.3. Skupiono się na pracach gdzie skrępowanie następowało wskutek zastosowania stalowego uzwojenia w postaci strzemion i spiral.

2.3. Prace badawcze eksperymentalne

Richart i inni

RICHART I INNI (1928) [96] – pierwsza z prac wykonywanych na Uniwersytecie w Illinois we współpracy z ACI dotyczy wyłącznie zachowania betonu w trójosiowym stanie naprężenia. Stanowisko umożliwiało takie badanie przez regulację ciśnienia oleju na płaszczu, którym okryte były walcowe próbki poddawane ścisłaniu osiowemu w prasie. Przedstawiono szereg bezpośrednich wyników i krzywych obrazujących ślad powierzchni plastyczności na płaszczyźnie wyznaczonej przez osie naprężeń głównych σ_I i σ_{III} . Na podstawie zaprezentowanych danych można także wyznaczyć kąt tarcia wewnętrznego w betonie na około 37° .

RICHART I INNI (1929) [97] – w pracy opisano jak badano próbki walcowe o średnicy 254 mm (10") i wysokości 1016 mm (40") wykonane z betonu o wytrzymałości 18,2 MPa (średnia wytrzymałość badanych próbek 2645 psi). Zbrojenie w postaci okrągłych zwojów wykonane zostało z różnych gatunków stali, zastosowano różne wartości stopnia zbrojenia poprzecznego. Wybrane wyniki zacytowano w tabeli 2.4. W trakcie badania oprócz nośności mierzono także odkształcenia, co pozwoliło badaczom na określenie modułu Helmholtza K oraz stałej Poissona ν .

Tablica 2.1: Wybrane metody określania nośności przekroju uzwojonego.

Metoda	Wytrzymałość rdzenia	Naprężenia poprzeczne	Uwagi
PN-EN-1992 [33]	$f_{cc} = f_c \left(1,0 + 5,0 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$		$\sigma_T \leq 0,05 f_c$
	$f_{cc} = f_c \left(1,125 + 2,5 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$		$\sigma_T > 0,05 f_c$
ModelCode2010 [51]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 3,5 \left(\frac{\sigma_T}{f_c} \right)^{\frac{3}{4}} \right)$	$\sigma_T = \omega_c f_c \left(1 - \frac{s_c}{d_c} \right)^2$	rdzeń okrągły, zwój
		$\sigma_T = \omega_c f_c \left(1 - \frac{s_c}{d_c} \right)$	rdzeń okrągły, strzemiona
		$\sigma_T = \omega_c f_c \left(1 - \frac{s_c}{a_c} \right) \left(1 - \frac{s_c}{b_c} \right) \left(1 - \frac{\sum b_i^2 / 6}{a_c b_c} \right)$	rdzeń prostokątny
Considère 1903 [21, 54]	$f_{cc} = f_c \left(1,5 + 4,8 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$	$\sigma_T = \frac{\rho_T f_s}{2}$	σ_T gdy rdzeń okrągły
Richart 1929 [97]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 4,1 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$	$\sigma_T = \frac{\rho_T f_s}{2}$	σ_T gdy rdzeń okrągły, $\rho_T \geq 0,425 \frac{f_c}{f_s} \frac{A_g - A_c}{A_c}$
Richart 1934 [98]	$f_{cc} = f_c \left(0,85 + k \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$		j.w. oraz $3 \leq k \leq 5$, sugerowane $k = 4$
Freudenthal 1933 [37, 54]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 6 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$	$\sigma_T = \frac{\rho_T f_s}{2}$	σ_T gdy rdzeń okrągły, $\rho_T \leq 3\%$
Mörsch 1950 [71, 54]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 3 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$	$\sigma_T = 15 \rho_T f_c$	sztywność stali powiązana z betonem
KuryHo 1954 [56]	$f_{cc} = \alpha f_c$		α określone doświadczenie
Olszak 1954 [77, 78]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 3,3 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$	$\sigma_T = \frac{\nu_c \frac{E_s}{E_c}}{g + \frac{E_s}{E_c} (1 - \nu_c)} \frac{N}{A_c}$	$\sigma_T < 0,3 f_c$
	$f_{cc} = f_c \sqrt{1 + 5,9 \frac{\sigma_T}{f_c}}$		$\sigma_T \geq 0,3 f_c$
Rüsch-Stöckl 1969 [102, 54]	$f_{cc} = f_c \left(1 + \frac{1}{\nu_c} \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$	$\sigma_T = \frac{\rho_T f_s}{2}$	σ_T gdy rdzeń okrągły, $\nu_c = \frac{1}{5}$
Newman-Newman 1969 [73]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 3,7 \left(\frac{\sigma_T}{f_c} \right)^{0,86} \right)$		
Stöckl-Menne 1975 [114, 54]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 4,6 \frac{\sigma_T}{f_c} \left(1 - \frac{s_c}{d_c} \right) \right)$		

Tablica 2.2: Wybrane metody określania nośności przekroju uzwojonego.

Metoda	Wytrzymałość rdzenia	Napężenia poprzeczne	Uwagi
Müller 1975 [72, 54]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 2\gamma \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$		$\gamma = 3,25e^{[-0,125] \sqrt{\sigma_T}}$
Park–Priestley 1981 [88, 84]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 2\frac{\sigma_T}{f_c} \right)$		
Sheikh–Uzmeri 1982 [108]	$f_{cc} = f_c \left(1 + \frac{b_c^2}{140P_{occ}} \left[\left(1 - \frac{ns_T^2}{5,5b_c^2} \right) \left(1 - \frac{s}{2b_c} \right)^2 \right] \sqrt{\rho_T} f_s \right)$		
Ahmad–Shah 1982 [3]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 4,2556 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$		$\frac{\sigma_T}{f_c} \leq 0,68$
	$f_{cc} = f_c \left(1,7757 + 3,1171 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$		$\frac{\sigma_T}{f_c} > 0,68$
Faftis–Shah 1985 [34]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 1,15 \frac{\sigma_T}{f_c} + 30,48 \frac{\sigma_T}{(f_c)^2} \right)$		
Mander–Park 1988 [64]	$f_{cc} = f_c \left(2,354 \sqrt{1 + 7,94 \frac{\sigma_T}{f_c}} - 2 \frac{\sigma_T}{f_c} - 1,254 \right)$	$\sigma_T = \omega_c f_c \left(1 - \frac{s_c}{a_c} \right) \left(1 - \frac{s_c}{b_c} \right) \left(1 - \frac{\sum b_i^2 / 6}{a_c b_c} \right)$	
Saatcioglu–Razvi 1992 [103, 93]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 6,7 \left(\frac{\sigma_T}{f_c} \right)^{0,87} \right)$	$\sigma_T = k_2 \frac{\sum_{i=1}^n (A_s f_s \sin \alpha)_i}{s b_c}$	$f_s = E_s \left(0,0025 + 0,04 \sqrt[3]{\frac{k_2 \rho_T}{f_c}} \right) \leq f_{yt}$
El-Dash–Ahmad 1994 [30]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 0,7 \left(\frac{f_c}{f_y} \frac{m}{\rho_{se}} \right)^{0,2} \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$	$\sigma_T = \rho_{se} f_s$	
Karabinis–Kiousis 1994 [52]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 4,269 \left(\frac{\sigma_T}{f_c} \right)^{0,587} \right)$		
Cusson–Paultre 1995 [23]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 2,1 \left(\frac{\sigma_T}{f_c} \right)^{0,7} \right)$		BWW
Attard–Setunge 1996 [10, 105]	$f_{cc} = f_c \left(1 + \frac{\sigma_T}{0,288(f_c)^{0,67}} \right)^k$		$k = 1,25 \left(1 + 0,062 \frac{\sigma_T}{f_c} \right) (f_c)^{-0,21}$

Tablica 2.3: Wybrane metody określania nośności przekroju uzwojonego.

Metoda	Wytrzymałość rdzenia	Naprężenia poprzeczne	Uwagi
Hoshikuma 1997 [46]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 7,6 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$	$\sigma_T = \alpha \frac{\rho_T f_{yt}}{2}$	$\alpha = 1,0$ okrag; $\alpha = 0,2$ kwadrat
Imran 2001 [48]	$f_{cc} = f_c \left(\frac{\sigma_T}{f_c} - 0,021 + \sqrt{10,571 \frac{\sigma_T}{f_c} + 1,043} \right)$		
Shehata 2002 [107]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 2 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$ okrag		CFRP
	$f_{cc} = f_c \left(1 + 0,85 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$ kwadrat		
	$f_{cc} = f_c \left(1 + 0,70 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$ prostokat		
	$f_c \left(1 + 0,70 \frac{\sigma_T}{f_c} \right)$ prostokat		
Bousalem-Chikh 2007 [15]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 0,8 \frac{\sigma_T}{\sqrt{f_c}} \right)$	$\sigma_T = k_e \frac{\rho_T f_s}{2}$	σ_T - jak u Mandera[64], stąd k_e
Zheng 2008 [134]	$f_{cc} = (1 - A) K_{IC} C + \sigma_T \left(2,4 + \pi \sqrt{IC} \right)$		oparty na mechanice pękania
Moghadam 2010 [69]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 8 \frac{\sigma_T}{f_c} - 4 \left(\frac{\sigma_T}{f_c} \right)^{12} \right)$	$\sigma_T = k_e \frac{\rho_T f_s}{2}$	σ_T jak w[64]
Eid 2010 [29]	$f_{cc} = f_c \left(0,47 \rho_T \frac{f_s}{f_c} - 0,021 + \sqrt{1,043 + 4,97 \rho_T \frac{f_s}{f_c}} \right)$		$f_s = E_s \frac{1}{\rho_T m^2 (510 - 390m) + 40m + 670} \leq f_{yt}$
Lingola 2011 [58]	$f_{cc} = f_c \left(1 + 1,42 \frac{\sigma_T}{f_c} - 1,40 \left(\frac{\sigma_T}{f_c} \right)^2 + 0,30 \left(\frac{\sigma_T}{f_c} \right)^3 \right)$		FRP
Awang 2013 [11, 79]	$f_{cc} = 2,62 f_c \left(\rho_T \frac{f_s}{f_c} \right)^{0,4}$		BWW, zbrojenie aktywne

Tablica 2.4: Wybrane wyniki badań okrągłych słupów z uzwojeniem.

ρ_T [%]	f_{cm} [psi]*	f_{cm} [MPa]	f_{yt} [psi]	f_{yt} [MPa]	spalling [psi]	spalling [MPa]	nośność [psi]	nośność [MPa]
0	2425	16,72	-	-	-	-	2130	14,69
0,5	2700	18,62	70500	486,08	2545	17,55	2680	18,48
1,11	2725	18,79	70600	486,77	2670	18,41	3590	24,75
2,07	2730	18,82	53500	368,87	2965	20,44	3665	25,27
2,64	2615	18,03	53400	368,18	3590	24,75	4295	29,61
4,41	2775	19,13	66700	459,88	3680	25,37	6430	44,33
1,96	2645	18,24	197400	1361,03	3410	23,51	7880	54,33

UWAGI
 * określano na próbkach walcowych 6"x12"
 - podano wyniki uśrednione dla poszczególnych serii, serie liczyły od 3 do 6 próbek
 - w tabeli podano naprężenia w rdzeniu w czasie odpryskiwania otuliny i w czasie zniszczenia

RICHART I INNI (1934) [98] – ostatnia z publikacji opisuje badania obejmujące łącznie 564 próbki podzielone na 9 grup, z których każda składała się z kilku serii badawczych. Eksperymenty, tak jak w latach poprzednich, prowadzone były na słupach o przekroju okrągłym, ale skupiały się głównie na określeniu wpływu wcześniej nie zróżnicowanych czynników takich jak wpływ efektu skali, szybkość i sposób obciążania, sposób wykończenia głowic, wpływy reologiczne. Dodatkowo badania dotyczyły różnych betonów i różnego zbrojenia podłużnego. Większość próbek stanowiły elementy o średnicy 203,2 mm (8") i długości 1524 mm (5'). Większe próbki (o średnicach 12", 20" i 28" i odpowiednio zwiększonych długościach) zastosowano w serii 5. i 6., w których badano także efekt skali. Stosowano betony o wytrzymałościach 2000 psi = 13,79 MPa, 3500 psi = 24,13 MPa, 5000 psi = 34,48 MPa, 8000 psi = 55,16 MPa. Stopnie zbrojenia podłużnego od $\rho = 0$ do $\rho = 6\%$, zaś zbrojenia poprzecznego spiralnego od $\rho_T = 0$ do $\rho_T = 2\%$. Próbki do badań efektów reologicznych pod wpływem długotrwałego obciążenia podzielone były na te pozostawione w warunkach suchych lub wilgotnych, a czas ich pozostawiania pod obciążeniem wynosił zależnie od próbki od 1 do 3,5 roku.

Raport z badań [98] dostarcza dużej liczby wyników nośności dla próbek kontrolnych, a także zwraca uwagę na zjawiska, które mogą być punktem wyjścia do przyjmowania założeń projektowych. Autorzy podzielili badane próbki na grupy, które służyły im do zdiagnozowania wpływu poszczególnych czynników na nośność elementów:

– Grupa 1. posłużyła sprawdzeniu oddziaływania wzmocnienia głowic na nośność i nie wykazała by sposób ich wykonania lub ewentualnie dozbrojenia wpływał na wynik nośności badanego elementu. Próbki ulegały zniszczeniu w różnych miejscach na środkowym odcinku. Najlepsze efekty (nośności elementów) dało proste zakończenie bez żadnych wzmocnień.

– Grupa 2. obejmowała serie zróżnicowane ze względu na szybkość przykładania obciążenia oraz ewentualnie cykliczność obciążania próbek. Obciążanie przykładano w cyklach trwających 15 minut lub 4 godziny. Nie zauważono dużej różnicy niezależnie od tego, którą serię analizowano.

– Grupy 3. i 4. służyły sprawdzeniu efektów pozostawiania pod obciążeniem przez długi czas, w zależności od poziomu przykładanego obciążenia. Trzecia grupa obciążana była do poziomu planowego obciążenia użytkowego, zaś czwarta blisko nośności granicznej. Większość próbek zbadano po roku, na części mierzono odkształcenia przez okres 3,5 roku. Zauważono występowanie skurczu i pełzania betonu, największe przyrosty odkształceń następowały w pierwszych miesiącach, a po około roku były już prawie stałe. Zauważono wpływ wysokiej wilgotności na zmniejszenie odkształceń reologicznych, a także wpływ zbrojenia podłużnego, które przejmuje część obciążeń z kurczącego się betonu. Ponadto zauważono wzrost nośności betonu wraz z wiekiem. Próbki przechowywane w warunkach suchych miały po roku średnio o kilkanaście procent wyższą wytrzymałość i 3 % wyższą sztywność niż bliźniacze zbadane bezpośrednio po osiągnięciu zakładanej nośności, a w warunkach wilgotnych prawie o 30 % wyższą nośność i o ponad 30 % większą sztywność.

– Grupa 5. obejmowała serie różnych wielkości, które miały pomóc w ustaleniu czy istnieje efekt skali w przypadku zagadnienia słupów uzwojonych. Podczas testów stwierdzono obserwowane przy innych seriach zależności efektywności skrępowania od stopnia zbrojenia poprzecznego i wytrzymałości betonu, ale nie zmieniały się one wraz ze zmianą wielkości próbek. Badacze postulują brak efektu skali w przypadku omawianego zjawiska.

– Grupa 6. obejmowała, podobnie jak poprzednia, próbki o różnej średnicy, ale posłużyła badaniu wpływ otuliny na nośność słupów uzwojonych. Do każdej z wcześniej wykonanych próbek przygotowano analogiczną, z pogrubioną o 2" otuliną rdzenia. Zauważono, że dodatkowy materiał nie wpłynął na nośność słupów o większych rozmiarach (20" i 28"), ale dał wzrost nośności próbek najmniejszych. W dalszej analizie wykazano, że dodatkowy przekrój otuliny pozwalał na przeniesienie większej siły osiowej niż siła przenoszona przez sam rdzeń łącznie z oddziaływającym na niego uzwojeniem. Należy przy tym dodać, że otulina w tych przypadkach stanowiła ponad 30 % powierzchni całego przekroju (co przekroczyło zysk spowodowany skrępowaniem rdzenia). Mówiąc inaczej zniszczenie nastąpiło bezpośrednio po *spallingu*, tam gdzie procentowy udział otuliny w powierzchni przekroju był większy od efektywności skrępowania rdzenia uzwojeniem.

– Grupa 7. była wykorzystana do zbadania wpływu parametrów stali zbrojenia poprzecznego na nośność próbek. Autorzy badania wykazali silną korelację między nośnością a stopniem zbrojenia poprzecznego oraz gatunkiem stali zastosowanej do zbrojenia.

– Grupa 8. została wykorzystana do sprawdzenia, czy sposób przekazania obciążenia na próbki wpływa na nośność badanych elementów. Obciążenie przekazywane było wyłącznie na wystające na wysokość 1/4" końce prętów zbrojenia podłużnego. Nie stwierdzono żadnych istotnych różnic w zachowaniu próbek w stosunku do innych, zastosowanych w innych seriach pomiarowych.

– Grupa 31. – jej odmienne oznaczenie wynikało z zaliczenia do opracowania odrębnych badań wykonanych w 1931 r. – badacze sprawdzali wówczas wpływ zbrojenia podłużnego o dużych nośnościach na wytrzymałość słupów uzwojonych. W rezultacie

stwierdzono, że zbrojenie podłużne może efektywnie pracować w przekroju uzwojonym, ale jednocześnie zauważono wyższą od przewidywanych siłę w zbrojeniu w próbkach wykonanych ze słabszych betonów i jednocześnie pewien niedobór nośności zbrojenia podłużnego w próbkach wykonanych z mocniejszego betonu. Badacze nie potrafili wskazać przyczyny tego zjawiska, ani ustalić na podstawie liczby zbadanych próbek, czy ma on charakter ogólny.

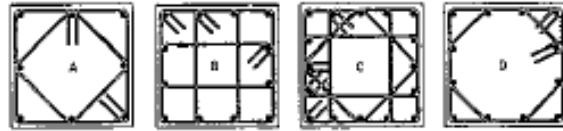
Kuryłło

KURYŁŁO (1952, 1954) [55, 56] – badania prowadzone we Lwowie w latach 40-tych i 50-tych pod kierownictwem Adama Kuryłły (jednego z prekursorów żelbetnictwa w latach 20-tych i 30-tych w Polsce [131]) miały na celu sprawdzenie wpływu kształtu rdzenia, stopnia zbrojenia i wytrzymałości betonu na nośność słupów uzwojonych. W tym celu wykonano i zbadano 112 próbek o boku lub średnicy rdzenia 20 cm i wysokości 60 cm. Próbki miały kształt kwadratowy z kwadratowym rdzeniem lub ośmiokątny z kołowym, wykonano je z betonów o wytrzymałości na ściskanie 11 MPa i 20 MPa.

Zaobserwowano istotny wpływ kształtu na efektywność skrępowania – przekroje kwadratowe charakteryzowały się zdecydowanie gorszymi wynikami przyrostu nośności niż analogiczne próbki o rdzeniu okrągłym. Zauważono silną relację między stopniem zbrojenia poprzecznego a nośnością badanego słupa. Niemniej odnotowano, że wyższe przyrosty nośności obserwowano w przypadku próbek ze słabszego betonu niż dla betonu mocniejszego (różnica przyrostu nośności wynosiła kilkadziesiąt procent). Ponadto poczyniono obserwację, że przy odpowiednio wysokim stopniu zbrojenia poprzecznego (powyżej 3%) wytrzymałość betonu przestawała mieć jakikolwiek wpływ na nośność próbek. W tych przypadkach przy identycznym zbrojeniu poprzecznym uzyskiwano porównywalne wyniki dla obydwu betonów. W kwestiach związanych z odkształcalnością autor opisuje, że próbki wykonywane ze słabszego betonu ulegały znacznym odkształceniom plastycznym przed całkowitą utratą nośności, zaś wykonane z betonu mocniejszego ulegały gwałtownemu zniszczeniu.

Sheikh i inni

SHEIKH I UZUMERI (1980) [111] – badania prowadzone w Toronto obejmowały 24 próbki o kwadratowym przekroju poprzecznym i boku o długości 267 mm (10,5”), długości czynnej 1219 mm (48”) z poszerzonymi głowicami o długości 368 mm (14,5”) i szerokości 508 mm (20”), które nie były uzwojone, ale pozwalały przekazać równomiernie obciążenie przez głowicę maszyny wytrzymałościowej. Próbki były podzielone na 4 serie o odmiennym układzie zbrojenia poprzecznego. Wewnątrz każdej serii elementy różniły się stopniem zbrojenia poprzecznego ($\rho_T = 0,76\% - 2,40\%$), przekrojem zbrojenia podłużnego ($A_s = 2,48 - 5,28$ cali kwadratowych) i gatunkami zastosowanej stali. Wytrzymałość betonu we wszystkich próbkach wahała się od 31,30 MPa do 40,89 MPa.



Rysunek 2.3: Przekroje badane w pracy [111].

Próbki poddano testom wytrzymałościowym na osiowe ściskanie. Na podstawie uzyskanych wyników stwierdzono:

1. możliwe jest efektywne skrępowanie betonu przy użyciu strzemion. W testach udało się zanotować nawet 70 % wzrostu nośności w porównaniu z analogicznym przekrojem bez uzwojenia;

2. obszar efektywnie skrępowany w przypadku strzemion wielociętych jest mniejszy niż cały obszar rdzenia, gdyż pewne obszary są krępowane tylko przez część zbrojenia poprzecznego;

3. przekrój zbrojenia podłużnego w bardzo niewielkim stopniu, albo wcale, wpływał na uzyskanie efektu skrępowania. Zdecydowanie istotniejszy okazał się rozstaw prętów podłużnych, który pozwalał uzyskać zwartą klatkę zbrojenia;

4. stopień zbrojenia poprzecznego ma decydujący wpływ na skalę efektu skrępowania betonu i uzyskaną nośność;

5. zastosowanie stali o podwyższonej wytrzymałości i zredukowanej półce plastycznej przyniosło mniejszy od oczekiwanych wzrost nośności rdzenia betonowego.

SHEIKH I TOKLUCU (1993) [110] – autorzy przeprowadzili badania eksperymentalne łącznie 27 próbek betonowych o średnicach (każda grupa po 9 sztuk) 356 mm (14”), 254 mm (10”), 203 mm (8”), zaś wysokość każdej była czterokrotnością średnicy. Próbki były zbrojone osiowo oraz spiralnym uzwojeniem, o zmiennej ilości oraz rozstawie. Stopień zbrojenia poprzecznego ρ_T stosowano w przedziale od 0,58 % do 2,3 %. Beton we wszystkich próbkach projektowany był na wytrzymałość 35 MPa. Elementy poddano osiowemu ściskaniu.

Celem badania była ocena wpływu stopnia zbrojenia poprzecznego (ilości uzwojenia) oraz jego ułożenia na efektywność skrępowania rdzenia betonowego. Zaobserwowano, że stosowanie uzwojenia zauważalnie podnosi wytrzymałość i plastyczność betonu ograniczonego rdzeniem przekroju. Zauważono, że przy stałym stopniu zbrojenia poprzecznego zmiana rozstawu zwojów w pewnym zakresie (wysokość skoku $s \leq 0,5D_c$, gdzie D_c to średnica rdzenia) nie wpływa na nośność słupa, lecz co najwyżej dla wyższych wartości ρ_T zmniejszenie skoku poprawia plastyczne zachowanie słupa w fazie zniszczenia. Dla niższych stopni zbrojenia znaczny spadek siły osiowej następował przy odkształceniach około $\varepsilon = 20 - 30 \%$, zaś przy większej ilości uzwojenia zwykle $\varepsilon = 40 - 50 \%$, przy czym dla tej grupy zaczynał być zauważalny wpływ skoku uzwojenia. Ponadto stwierdzono, że wzrost siły osiowej w betonie odpowiada 2,1 do 4-krotnej wartości naprężeń poprzecznych

wywołanych skrępowaniem, zaś końcowy wzrost siły osiowej w porównaniu z elementem nieskrępowanym wyniósł od 21 % do 70 % zależnie od zastosowanej ilości zbrojenia poprzecznego. Dodatkowo stwierdzono, że liczba prętów podłużnych tworzących klatkę zbrojenia nie wpływała na efektywność skrępowania.

SHEIKH I KHOURY (1993) [112] – prace te prowadzono równolegle z opisanymi w [110]. W ramach tych badań uzwojone słupy obciążono do poziomu obciążeń użytkowych, a następnie poddawano działaniu zmiennego obciążenia poziomego, które symulowało efekty trzęsienia ziemi. W konsekwencji wypadkowa siła działała na znacznym i zmiennym mimośrodku, który zwiększał się z każdym cyklem, a próbki po około 8–13 cyklach zmiany zwrotu obciążenia ulegały zniszczeniu na skutek zginania.

Najważniejsze wnioski z tego badania to fakt, że zbrojenie poprzeczne potrafi znacznie wpłynąć na zwiększenie ilości energii odkształcenia absorbowanej przez słup. Według autorów w próbkach z poprawnie wykonanymi strzemionami i stopniem zbrojenia pozwalającym na uwzględnienie efektu skrępowania, zbrojenie poprzeczne odpowiada za około 60 % energii pochłanianej i rozpraszanej przez element. Dodatkowo zwrócono uwagę, że zwiększenie siły osiowej znacznie zmniejsza własności plastyczne słupa. W badanym przypadku zwiększenie obciążenia z poziomu 60 % nośności projektowanej bez uwzględnienia skrępowania do poziomu 77 % zredukowało odkształcalność o 45 %.

Saatcioglu i Razvi

SAATCIOGLU I RAZVI (1989–99) [94, 103, 92, 95, 93] – cykl badań prowadzonych w Ottawie przez Saatcioglu i Razviego dotyczył wpływu zbrojenia poprzecznego o różnym ukształtowaniu na nośność i odkształcalność słupów krępych poddawanych osiowemu ścisnieniu. W okresie 10 lat badano wpływ różnych kształtów uzwojenia, stopnia zbrojenia poprzecznego, wpływ skoku uzwojenia, zbrojenia podłużnego itp. Badaniom poddawano próbki z betonów zwykłych oraz betonów wysokich wytrzymałości. Efektem prac było między innymi opracowanie i udoskonalenie modeli zachowania betonu skrępowanego, które opisywały relację naprężenie–odkształcenie na bazie wyników doświadczalnych. Autorzy łącznie opublikowali kilkadziesiąt prac związanych z tym tematem, skupiając się później na zagadnieniach sejsmicznych, gdzie tego typu rozwiązania konstrukcyjne znajdują zastosowanie.

Nowakowski, Godycki–Ćwirko

NOWAKOWSKI (1983) [75] – rozprawa doktorska A. B. Nowakowskiego wykonana pod opieką T. Godyckiego–Ćwirko obejmowała przeprowadzone w Łodzi badania uzwojonych słupów żelbetowych ścisanych osiowo oraz mimośrodkowo, a dodatkowo analizę wpływu smukłości na nośność. Wykonano i zniszczono w trakcie eksperymentów 45 próbek słupów okrągłych: ze zbrojeniem poprzecznym podzielonych na 3 partie po 15 elementów zgrupowane w 5 seriach oraz 45 próbek kontrolnych bez uzwojenia podzielonych na 2 par-

tie (30 oraz 15 sztuk). Słupy zbrojone miały średnicę rdzenia przekroju równą 150 mm, zaś niezbrojone średnicę całkowitą równą 150 mm, długość próbek wynosiła zależnie od serii 600 mm lub 900 mm. W odpowiednich partiach zastosowano podparcie utwierdzone lub przegubowe na obydwu końcach pręta. Wszystkie próbki miały takie samo zbrojenie podłużne wykonane z prętów $\phi 10$ ze stali gładkiej, stopień zbrojenia $\rho = 3,2\%$, zbrojenie poprzeczne wykonane było z takiej samej stali z prętów $\phi 4,5$ lub $\phi 6$ o skoku spirali 2,5 cm, stopień zbrojenia poprzecznego odpowiednio $\rho_T = 1,70\%$ lub $\rho_T = 3,02\%$. Wykorzystano betony zwykłe o wytrzymałości na ściskanie od 23,68 MPa do 32,58 MPa projektowane na 25 MPa oraz stal gatunku St0. Ponadto autor wysnuł na podstawie własnych badań wnioski odniósł do wyników badań prawie 400 słupów uzwojonych, analizowanych przez innych badaczy, próbując dowieść uniwersalności postawionych tez.

Wśród głównych wniosków i obserwacji autor podaje propozycje korekty wzorów zamieszczonych w normie [87]. Uwagi dotyczą sposobu określania nośności słupów uzwojonych obciążonych mimośrodowo oraz uwzględnienia redukcji nośności przy smukłości słupów $\lambda > 20$. Nowakowski zauważa, że efekty skrępowania można obserwować w przypadku słupów okrągłych, które były przedmiotem badań, przy mimośrodkach niższych niż promień rdzenia przekroju ($e < 0,125d$), co odpowiada wcześniejszym pracom teoretycznym Olszaka z lat 50-tych i początku 60-tych [77, 78], oraz autorów badań wykonanych w Monachium w połowie lat 70-tych [102, 72]. Dodatkowo zwraca uwagę, że pozytywne oddziaływanie uzwojenia na nośność elementu zanika stopniowo po przekroczeniu smukłości $\lambda = 20$, aż do całkowitego braku wpływu przy smukłości $\lambda = 50$. Kolejnym istotnym spostrzeżeniem jest zalecenie stosowania w słupach uzwojonych stali niskowęglowych o stosunkowo niskiej granicy plastyczności. Dzięki temu możliwe jest wykorzystanie uzwojenia przy niższych odkształceniach podłużnych i poprzecznych niż w przypadku stali wysokowęglowych.

Praca rozpoczęła cykl badań nad słupami uzwojonymi prowadzonymi przez zespoły w Łodzi, a następnie w Gdańsku, związane początkowo z prof. Godyckim-Ćwirko.

Godycki-Ćwirko, Korzeniowski, Nagrodzka-Godycka

KORZENIOWSKI (2000) – badania prowadzone w Gdańsku w połowie lat 90-tych przez wymienionych autorów zaprezentowane zostały w kilku publikacjach, w tym podsumowane w monografii Korzeniowskiego [54]. Obejmowały one eksperymentalne badanie w trzech etapach łącznie 62 słupów okrągłych o średnicy 205 mm i wysokościach 600 mm lub 1500 mm. Próbki różniły się zastosowanym betonem, stopniem zbrojenia podłużnego oraz poprzecznego (związanym z różnym skokiem uzwojenia), a także mimośrodem działającej siły od 0 do 60 mm. Z uwagi na różnice w geometrii badane próbki miały smukłości $\lambda = 14,1$ – długości 600 mm, $\lambda = 31,6$ – długości 1500 mm.

Poczyniono wiele istotnych obserwacji, poczynając od tego, że wraz ze wzrostem ilości uzwojenia zauważalnie rośnie nośność słupów ściskanych osiowo. Jednakże przy

wzroście mimośrodowi siły efekt ten maleje, a przy największych mimośrodkach, gdy wypadkowa siła znajduje się poza rdzeniem przekroju przestaje być całkowicie widoczny, niezależnie od smukłości słupa. Dodatkowo zauważono, że na efektywność uzwojenia wpływa stopień zbrojenia podłużnego. Większa ilość zbrojenia podłużnego skutkowałą obserwowaniem niższych naprężeń w uzwojeniu w chwili zniszczenia, co nie pozwalało w pełni wykorzystać zbrojenia poprzecznego. Poza tym poziom naprężeń w uzwojeniu podczas zniszczenia był zawsze kilkukrotnie niższy od granicy plastyczności. W przypadku wykonania słupów z betonu wysokiej wytrzymałości wartości te były około 2,5 raza niższe niż przy betonach zwykłych, co świadczy o niskiej skuteczności skrępowania rdzenia w takim wypadku.

Yin, Wang i inni

Na wstępie autor dysertacji zaznacza, że zaprezentowane w tym punkcie wyniki badań dla słupów kwadratowych o nietypowym zbrojeniu poprzecznym stały się bezpośrednią inspiracją do podjęcia badań związanych z betonem skrępowanym i słupami uzwojonymi. Efektem tego zainteresowania stało się opracowanie modelu stanowiącego proste narzędzie do badania efektu skrępowania w układach o dowolnym kształcie przekroju i układzie zbrojenia poprzecznego.

YIN, WANG I INNI (2011, 2012) [128, 127] – obydwie przywołane publikacje dotyczą w znacznej części tego samego materiału badawczego. Prace te dają materiał porównawczy, dostarczając wyniki badań doświadczalnych w postaci wykresów zależności średnich naprężeń normalnych w rdzeniu przekroju jako funkcji odkształcenia, w zakresie aż do ich całkowitego zniszczenia. W pracach tych temat jest potraktowany szeroko, gdyż łącznie przebadano przekroje o dziesięciu układach zbrojenia poprzecznego, a w czterech przeprowadzono krótkie serie przy różnych konfiguracjach materiałowych oraz różnych stopniach zbrojenia. Autorzy dla zastosowanych materiałów podają po jednym parametrze: dla stali granicę plastyczności, dla betonu wytrzymałość na jednoosiowe ściskanie. Badaniu poddane były próbki o wymiarach 600 mm × 600 mm × 1200 mm, które z uwagi na gabaryt były niewrażliwe na utratę stateczności, a ich zniszczenie spowodowane było wyczerpaniem nośności przekroju.

Podstawowe dane o próbkach drugiej fazy testów zostały przedstawione w pracy [128]. Z artykułu wynika, że do wykonania uzwojenia wykorzystano pręty oznaczone numerami od 3 do 5, które mają następujące przekroje: nr 3 $A_s = 0,713 \text{ cm}^2$ co odpowiada prętom 3/8", nr 4 $A_s = 1,222 \text{ cm}^2$ pręty 4/8", zaś nr 5 $A_s = 1,986 \text{ cm}^2$ to pręty o średnicy 5/8". W zależności od próbki zastosowano dwa gatunki stali o granicach plastyczności $f_{yt} = 274,7 \text{ MPa} \approx 40000 \text{ psi}$ oraz $f_{yt} = 412,0 \text{ MPa} \approx 60000 \text{ psi}$. Elementy wykonane były z betonów o różnych wytrzymałościach: zbrojone stalą węglową z betonu o wytrzymałości $f'_c = 34,4 \text{ MPa} \approx 5000 \text{ psi}$, zaś zbrojone stalą o podwyższonej wytrzymałości z betonu $f'_c = 68,7 \text{ MPa} \approx 10000 \text{ psi}$. Stosowany stopień zbrojenia poprzecznego wynosił

od $\rho_T = 1,26\%$ do $\rho_T = 4,74\%$. Celem pracy było wskazanie najwydajniejszego sposobu kształtowania zbrojenia poprzecznego.

W rezultacie wykazano, że zastosowanie spiralnych zwojów do zbrojenia słupów o przekroju kwadratowym pozwala uzyskać lepsze efekty skrępowania rdzenia betonowego niż najczęściej stosowane układy w postaci strzemion wielociętych.

YIN, WANG I INNI (2013) [125] – praca ta stanowi kontynuację i rozwinięcie wcześniejszych badań i opisuje zachowanie elementów prostokątnych i owalnych. Zbadano 4 warianty na próbkach o wymiarach $600\text{ mm} \times 870\text{ mm} \times 1800\text{ mm}$ zaopatrzonych dodatkowo w powiększone głowice. Wykonano badania pod obciążeniem cyklicznym z mimośrodem zmiennym w dwóch kierunkach, co miało symulować zachowanie konstrukcji w warunkach trzęsienia ziemi. Punkt odniesienia stanowił przekrój prostokątny zbrojony strzemionami. Ponadto zbadano przekrój prostokątny zbrojony sześcioma spiralami oraz owalny ze strzemionami i owalny z dwoma spiralami. Zastosowano materiały jak w poprzednim opracowaniu.

W rezultacie przeprowadzonego badania wykazano wyższą skuteczność zbrojenia poprzecznego wykonanego ze zwojów okrągłych, nawet gdy nie obejmują równomiernie całego przekroju, nad rozwiązaniami w postaci strzemion wielociętych ułożonych równoległe do boków przekroju. Próbki te wykazały lepsze rozproszenie energii odkształcenia, zachowując wysoką nośność i odkształcalność plastyczną po przekroczeniu wartości granicznej obciążenia.

2.4. Symulacje numeryczne

Havlásek, Jirásek, Bittnar

HAVLÁSEK, JIRÁSEK, BITTNAR (2019) – przedstawiona w maju 2019 r. praca [44] czeskich naukowców prezentuje model numeryczny dla przypadku ściskania krótkiego słupa betonowego, ze zbrojeniem poprzecznym w postaci 5-ciu prefabrykowanych zwojów. Jak przyznają sami autorzy przypadek inspirowany jest między innymi pracami [128, 127], które prezentowały taki sposób kształtowania zbrojenia i wykazały jego zalety. Wykorzystano trójwymiarowy model, gdzie obszar rdzenia dyskretyzowano elementami sześciennymi, a pręty zbrojenia elementami kratownicowymi. Model próbki o wymiarach $600\text{ mm} \times 600\text{ mm} \times 1200\text{ mm}$ składał się z 16000 elementów objętościowych i około 5000 elementów prętowych. Połączenia między poszczególnymi elementami (w tym między zbrojeniem a rdzeniem) były sztywne.

Model materiałowy betonu opierał się na pracy Grassla i innych [42], gdzie przedstawiono propozycję materiału sprężysto–plastycznego zwanego przez autorów *Concrete Damage Plasticity Model 2 (CDPM2)*, z niestowarzyszonym prawem płynięcia, ze wzmocnieniem/osłabieniem plastycznym. Funkcja plastyczności stanowi kolejny krok w udosko-

naleniu propozycji Willama i Warnkego [124]. Autorami wcześniejszych propozycji są między innymi Menétrey [67] i Bažant [49]. Funkcja plastyczności ma następującą postać:

$$F_{\text{CDPM2}} = \left\{ [1 - q_{h1}(\kappa_p)] \left(\frac{\rho}{\sqrt{6}f_c} + \frac{p}{f_c} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho}{f_c} \right\}^2 + m_0 q_{h1}^2(\kappa_p) q_{h2}(\kappa_p) \left[\frac{\rho}{\sqrt{6}f_c} r(\cos \theta) + \frac{p}{f_c} \right] - q_{h1}^2(\kappa_p) q_{h2}^2(\kappa_p). \quad (2.40)$$

Zmienne bezwymiarowe q_{h1} i q_{h2} zależą od parametru wzmocnienia plastycznego κ_p , z kolei parametr tarcia m_0 uzależniony jest od wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie materiału oraz parametru mimośrodowości obciążenia. Promień $r(\cos \theta)$ określony jest podobnie jak w warunku Willama i Warnkego, ale z uwzględnieniem wpływu parametru mimośrodowości.

Stałe materiałowe, które nie były zbadane przez autorów badań doświadczalnych [128, 127], zostały przyjęte według relacji zaproponowanych przez ModelCode2010 [51]. Do modelowania stali zbrojeniowej wykorzystano model sprężysto–plastyczny ze wzmocnieniem i kryterium plastyczności Hubera. W efekcie prowadzonych symulacji udało się uzyskać zbliżoną postać relacji naprężenie–odkształcenie, a ponadto przestrzenne mapy naprężeń obrazujące wykorzystanie przekroju. Za najlepsze oszacowanie nośności autorzy uważają procedurę Mandera [64].

Arslan i inni

W artykule z 2013 roku [6] naukowcy ze Stambułu zaprezentowali trójwymiarowy model obliczeniowy wykonany w programie ANSYS 11.0. Obszar betonowy został opisany przez continuum sprężysto–plastyczne z funkcją plastyczności Druckera–Pragera w klasycznym ujęciu (ze stowarzyszonym prawem płynięcia, bez wzmocnienia, bez plastycznego zniszczenia), powołując się przy tym na [68], gdzie z sukcesem zastosowano podobne podejście. Przy kalibracji modelu autorzy dużo uwagi poświęcili właściwemu określeniu kohezji betonu analizując różne podejścia (m.in. [19, 5, 100]). Ostatecznie przedstawiono model określający spójność jako $c = 0,46 \left(\frac{a}{d}\right)^{1,37} \left(\frac{N}{N_0}\right)^{0,16} f_c^{0,48}$ zależną od proporcji wymiarów elementu, współczynnika osiowości obciążenia i wytrzymałości betonu. Kąt tarcia wewnętrznego przyjmowali za innymi pracami w granicach $\phi = 30^\circ - 37^\circ$. Porównując rezultaty własnych symulacji z wynikami doświadczalnymi zwracają uwagę, że tak skonstruowany model pozwala uzyskać korelację od 0,83 do 1,28 w przypadku populacji, których parametry materiałowe i geometryczne mają szeroki zakres.

Moghaddam, Samadi, Pilakoutas

Autorzy artykułu [69] z 2010 roku prezentują model MES oraz uproszczone formuły bazując głównie na własnym materiale doświadczalnym (z badań prowadzonych w Teheranie) zaprezentowanym w pracy [70]. Wprowadzenie modelu poprzedzone jest szerokim przeglądem innych wcześniej opublikowanych prac (począwszy od Richarta [97]) głównie opublikowanych w Ameryce Północnej, ale także w Japonii i Europie Południowej.

Proponowany jest trójwymiarowy model wykonany w programie ABAQUS, z zastosowaniem fizycznie nieliniowego materiału, który bazuje na opisie Lublina [62]. Wykorzystano funkcję plastyczności z niestowarzyszonym prawem płynięcia i ze wzmocnieniem (względnie osłabieniem), które tu pozwala opisać spadek sztywności w końcowej fazie pracy materiału. Funkcja plastyczności zaproponowana została w postaci:

$$F_L = \frac{1}{1 - \alpha} \left[\sqrt{3J_2} + \alpha I_1 + \beta \left(\frac{|\sigma_{\max}| + \sigma_{\max}}{2} \right) - \gamma \left(\frac{|\sigma_{\max}| - \sigma_{\max}}{2} \right) \right] - c = 0. \quad (2.41)$$

Sposób wyznaczania stałych omówiony jest w pracy [62], a także w [133, 132]. Ponadto przyjęto w modelu niestowarzyszone prawo płynięcia z funkcją potencjału plastycznego:

$$G = \sqrt{(\xi \sigma_R \tan \psi)^2 + q^2} - p \tan \psi, \quad (2.42)$$

gdzie p i q są niezmiennikami stanu naprężenia (opisane w załączniku), σ_R – wytrzymałością na jednoosiowe rozciąganie, ψ kątem dyatacji, a ξ jest parametrem skalującym tempo zbliżania się do asymptoty funkcji tangens, którego wartość autorzy przyjęli jako stały $\xi = 0,1$.

Zachowanie materiału przed osiągnięciem powierzchni plastyczności jest idealnie sprężyste, zaś po jej przekroczeniu na wartości naprężeń wpływają dodatkowo dwa parametry d_t i d_c , które opisują wpływ odkształceń plastycznych, a przyjmują wartości od 0 (materiał, niewydeformowany wcześniej do poziomu powierzchni plastycznej) do 1 (materiał w pełni zniszczony, z zerową sztywnością).

Wykorzystano elementy objętościowe do modelowania rdzenia betonowego, zaś płaszczyzny – mający reprezentować skrzepowanie matami FRP – aproksymowano elementami powłokowymi. W pracy [69] skupiono się na opisie zjawiska skrzepowania betonu, proponując dodatkowo formułę projektową do obliczania wytrzymałości rdzenia i granicznych odkształceń, lecz nie znajdujemy w niej bardziej szczegółowego opisu zastosowanych elementów skończonych.

Yu i inni

Chińscy badacze z Hongkongu podejmują temat modelowania betonu skrzepowanego w pracy z 2010 roku [130] głównie z powodu możliwości jakie daje nowy materiał – maty z włókna FRP. Swoją model przygotowali w środowisku programu ABAQUS. W stu-

dium przypadku zaprezentowano przykłady w płaskim stanie odkształcenia oraz zadanie osiowosymetryczne.

Model materiałowy betonu bazuje na kryterium plastyczności Lublinera [62], ale w postaci zmodyfikowanej jak w [57]. Ogólna postać funkcji plastyczności pozostaje taka sama jak w równaniu (2.41). Zastosowano tu niestowarzyszone prawo płynięcia z funkcją potencjału plastycznego określoną tak jak we wcześniejszej pracy tych samych autorów [129], a bazującą na zmodyfikowanej postaci kryterium Druckera–Pragera (właściwie to zmiana ta wprowadza do wyrażenia składniki znane z hipotezy Mohra):

$$G = \sqrt{(\varepsilon \sigma_T \tan \psi)^2 + 3J_2^2} - \frac{I_1}{3} \tan \psi, \quad (2.43)$$

gdzie ε to parametr skośności, ψ – kąt dylatacji, a σ_T – wytrzymałość na rozciąganie. Gdy wartość parametru ε zbliża się do zera wówczas ślad funkcji G na płaszczyźnie zawierającej oś hydrostatyczną (prostopadłej do płaszczyzny dewiatorowej) zbliża się do linii prostej, w przeciwnym przypadku ślad ten ma kształt hiperboliczny z asymptotą zdeterminowaną przez kąt ψ . Model materiałowy betonu zawiera funkcję wzmocnienia plastycznego według propozycji [52] zapożyczoną z modelu CDPM dostępnego w programie ABAQUS, zaś parametr zniszczenia został zdefiniowany jako:

$$d = 1 - \frac{\sigma_{III}}{f_{c0}}, \quad (2.44)$$

przy czym dla ściskania przyjęto dodatnie wartości naprężenia głównego, a f_{c0} jest wytrzymałością betonu na ściskanie.

We wcześniejszej pracy [129] autorzy proponowali wykorzystać funkcję plastyczności będącą modyfikacją warunku Druckera–Pragera o element zależny od trzeciego niezmiennika dewiatora stanu naprężenia J_3 , który różnicuje promień śladu powierzchni plastycznej na płaszczyźnie dewiatorowej (modyfikacja sugerowana wcześniej przez Chena [19]), uzyskując zadowalające efekty. Jednakże zwrócili uwagę na rozbieżność między symulacjami a testami doświadczalnymi w przypadku prób stosowania stowarzyszonego prawa płynięcia. Wspólna konkluzja obydwu artykułów [129, 130] wskazuje, że stosowanie modelu z funkcją plastyczności w postaci funkcji Lublinera lub zmodyfikowanego modelu Druckera–Pragera (obie o kształcie zbliżonym także do warunku postulowanego przez Willama–Warnkego z 1974 r. [124]), wraz z niestowarzyszonym prawem płynięcia, wzmocnieniem lub osłabieniem plastycznym i zniszczeniem plastycznym pozwala wiernie odwzorować zachowanie betonu skrepowanego płaszczem – w tym przypadku z włókiem FRP.

Modelowanie betonu przedstawione w artykule z 2007 roku [101], które prezentuje efekty prac prowadzonych na Uniwersytecie Trackim w Ksanti, nie odbiega zasadniczo od podejść opisanych w innych przytoczonych pracach. Dla betonu zastosowano model materiału sprężysto–plastycznego, ze wzmocnieniem i niestowarzyszonym prawem płynięcia. Funkcję plastyczności zaproponowano w postaci:

$$F = \sqrt{J_2} \sqrt[4]{1 - \beta \sqrt{\frac{J_3}{\sqrt{J_2^2}}}} + \theta I_1 - \kappa, \quad (2.45)$$

gdzie β jest parametrem materiałowym związanym z wytrzymałością na odkształcenia postaciowe, θ parametrem związanym z wytrzymałością na ściskanie, zaś κ jest funkcją wzmocnienia/osłabienia. Postać funkcji jest zbliżona do zaproponowanej przez Willama i Warnkego. Sposób budowania funkcji wzmocnienia i ustalania wprowadzonych stałych materiałowych autorzy opisali we wcześniejszej swojej pracy [53]. Funkcja potencjału plastycznego ma kształt nieskończonego stożka (jak w przypadku funkcji Druckera–Pragera):

$$G = \sqrt{J_2} + \frac{\alpha}{6} I_1, \quad (2.46)$$

gdzie α jest parametrem zależnym od kąta dyatacji betonu.

W celu rozwiązania zagadnienia sprężysto–plastycznego proponują zastosowanie podejścia jawnego (*explicit*), w którym macierz sprężysto–plastyczna:

$$\mathbf{D}^{\text{ep}} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial F^{\text{T}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D}}{\frac{\partial F^{\text{T}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \sqrt{\frac{\partial G^{\text{T}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}}, \quad (2.47)$$

obliczana jest z wykorzystaniem funkcji potencjału plastycznego i rozwiązania równania zgodności:

$$dF = \frac{\partial F^{\text{T}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \quad (2.48)$$

które zapewnia, że naprężenia pozostają plastycznie dopuszczalne. W tych równaniach $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ jest trajektorią odkształceń plastycznych wyrażającą funkcję osłabienia–wzmocnienia plastycznego.

Interesujący jest także proponowany przez autorów model dla stali zbrojenia poprzecznego, który jest podwójnie liniowo–sprężysto–plastyczny tzn.: 1. liniowo–sprężysty do granicy plastyczności, 2. idealnie plastyczny do odkształceń ε_0 , 3. liniowo–sprężysty do granicy wytrzymałości σ_{su} , 4. idealnie plastyczny w całym dalszym zakresie pracy. Dla uzwojenia z włókien FRP węglowych i szklanych autorzy proponują przyjmować model liniowo–sprężysty do granicy wytrzymałości, a po jej przekroczeniu natychmiastowe zniszczenie materiału.

Tejchman i inni

MAJEWSKI, BOBIŃSKI, TEJCHMAN (2008) [63] – praca przedstawia model numeryczny zaproponowany dla zagadnienia ściskania mimośrodowego słupa żelbetowego. Dla betonu przedstawiono znacznie bardziej złożony model niż w większości pozostałych cytowanych tu prac. Zastosowano hybrydową funkcję plastyczności: w obszarze ścisaknym kryterium Druckera–Pragera ze wzmocnieniem, a w obszarze rozciągającym kryterium Rankine’a. Ponadto założono niestowarzyszone prawo płynięcia dla pierwszej części, z funkcją potencjału plastycznego bazującą na funkcji Druckera–Pragera, gdzie kąt tarcia wewnętrznego ϕ zastąpiono kątem dylatacji ψ . W obszarze zniszczenia przez rozciąganie przyjęto stowarzyszone prawo płynięcia. Model wzbogacono o nielocalne podejście do zmiany sztywności, wprowadzając parametr nielokalnego osłabienia związany z założonym wymiarem mikrostruktury.

Zbrojenie odwzorowano wykorzystując sprężysto–plastyczny model Hubera ze stowarzyszonym prawem płynięcia. Na styku elementów betonowych i stalowych założono prawo przyczepności, które symuluje poślizg między prętami a blokiem betonowym, ograniczając jednocześnie maksymalne naprężenia styczne.

Analizy prowadzono w zadaniach 2-wymiarowych wykorzystując siatkę trójkątną oraz 3-wymiarowych wykorzystując siatkę sześcienną. W pracy [63] badano słupy poddawane mimośroduemu ściskaniu i uzyskano wyniki symulacji zbieżne z danymi doświadczalnymi, szczególnie dla modeli trójwymiarowych. Wyniki przeprowadzonych analiz pozwoliły autorom stwierdzić, że największy wpływ na nośność takich elementów ma ich smukłość oraz mimośród siły. Dodatkowo zwiększanie rozmiaru mikrostruktury w pewnym zakresie wpływało na podniesienie wartości siły przenoszonej przez słup. Stosunkowo nieduży okazał się wpływ wprowadzenia prawa przyczepności elementów zbrojenia do rdzenia betonowego w porównaniu z modelem o połączeniach idealnie sztywnych.

MARZEC, TEJCHMAN, WINNICKI (2014) – w podobnym nurcie jak poprzednia praca utrzymana jest [66], jak i wcześniejsza [65]. Zastosowano tu także połączone kryterium Druckera–Pragera i kryterium Rankine’a oraz niestowarzyszone prawo płynięcia. Model prezentuje nielocalne ujęcie dla funkcji wzmocnienia. Ponadto, z uwagi na zastosowanie do zagadnień dynamicznych, odkształcenia plastyczne i wzmocnienie zdefiniowano w sposób zależny od czasu – model lepkoplastyczny – wprowadzając dodatkowy parametr czasu relaksacji

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{1}{\tau} \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}), \quad (2.49)$$

gdzie τ jest parametrem czasu relaksacji, a $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ jest rzutem tensora naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$ na powierzchnię plastyczności.

Zdaniem autorów, co wykazano na przykładach obliczeniowych, rozwijany przez nich model betonu zbrojonego pozwala wiernie odwzorować pracę elementów poddanych obciążeniom statycznym i dynamicznym; przewidywać postać zniszczenia, topologię zary-

sowania, obciążenia graniczne i towarzyszące im odkształcenia, lecz nie jest wystarczająco dokładny by jednocześnie modelować procesy reologiczne w betonie.

2.5. Podsumowanie

Można zauważyć, że zjawisko skrępowania betonu oraz opis zachowania betonu w stanie trójosiowego ściskania są szeroko opisywane w literaturze, w wielu niezależnych od siebie źródłach. Przeprowadzona kwerenda pozwoliła autorowi na przyjęcie założeń w dalszej części pracy, ze świadomością, że wielu interesujących prac nie przedstawił.

We wszystkich pracach, w których badano wpływ mimośrodowego obciążenia na efektywność uzwojenia, w tym prace teoretyczne wykazują, że najwyższą skuteczność skrępowania rdzenia betonowego uzyskuje się dla słupów obciążonych osiowo. Dodatkowo doświadczenie zawodowe związane z projektowaniem konstrukcji budowlanych wskazuje, że w wielu przypadkach (szczególnie układach płytowo-słupowych, z usztywnieniem tarczowym) z dość dobrą dokładnością słupy betonowe dokładnie tak pracują. Ponadto wśród badań słupów uzwojonych, do których dotarł autor (opisanych wyżej lub będących częścią badań zestawionych w punkcie 2.2) nie odnotowano przypadków zniszczenia słupów na głowicach. Warto zauważyć, że nie ma wśród badaczy całkowitej zgodności co do efektywności skrępowania rdzenia betonowego, co może wskazywać, że poza wyodrębnionymi czynnikami wpływającymi na nośność (jak np. stopień zbrojenia poprzecznego lub wytrzymałość betonu i stali) są też takie, których zwykle się nie uwzględnia. Mogą być wśród nich takie, które wpłyną bezpośrednio na sztywność betonu (rodzaj kruszywa, skład mieszanki betonowej), czynniki wpływające na wiązanie betonu, na przyczepność między prętami zbrojenia a betonem, sposób łączenia konstrukcyjnego zbrojenia podłużnego z uzwojeniem, być może także inne nie wymienione. Od lat 90-tych zaczęto wyraźnie rozróżniać badania nad skrępowaniem słupów z betonów zwykłych ($f_c = 20 - 40$ MPa) i z betonów wysokich wytrzymałości. Przy czym te drugie jest zauważalnie trudniej efektywnie skrępować (problem ten porusza m.in. w swojej dysertacji z 1995 roku S. Razvi [92]).

Od początku większość badań prowadzona jest na próbkach krępych, niepodatnych na utratę stateczności, niemniej podejmowano próby określania nośności także elementów smukłych. Można z nich wysnuć wspólny wniosek, że po przekroczeniu smukłości granicznej, poniżej której słup jest całkowicie niewrażliwy na utratę stateczności, efektywność stosowania uzwojenia szybko maleje wraz ze wzrostem smukłości.

Przed przyjmowaniem zbyt optymistycznych założeń przestrzega praca Waśniewskiego [122] z 2010, gdzie eksperymentalnie dowiedziono, że stosując się do zaleceń normy projektowej [33] w pewnych sytuacjach może dojść do zniszczenia elementu przed uzyskaniem oczekiwanej nośności. W słupach krępych wykonanych z betonu wysokiej wytrzymałości obserwowano sytuacje, gdzie zbrojenie poprzeczne w ogóle nie wpłynęło na nośność (podobnie zresztą jak w tajwańskich badaniach z 2011 [128]), albo wpływ ten obserwowano

wyłącznie we wzroście odkształcalności przed zniszczeniem (dotyczy słupów smukłych). Na przykład ten powołuje się Sokal [115] w opracowaniu opisującym skrępowanie w ujęciu polskich norm projektowych.

Modelowanie betonu uzwojonego właściwie wszyscy cytowani autorzy prowadzą z uwzględnieniem fizycznej nieliniowości materiałów. Dla stali zbrojeniowej najczęściej stosowany jest sprężysto–plastyczny model z warunkiem plastyczności Hubera–von Misesa–Hencky’ego. Dużo większa różnorodność dotyczy betonu: począwszy od modeli sprężysto–plastycznych z różnymi kryteriami plastyczności, z różnymi funkcjami potencjału plastycznego, przez modele lepko–plastyczne ze wzmocnieniem/osłabieniem, które umożliwiają obserwowanie spadku nośności dla większych odkształceń. Dalej modele z hybrydową funkcją plastyczności (inną w strefie zniszczenia przez rozciąganie, inną przy zniszczeniu przez ściskanie), modele z parametrem zniszczenia. Pewne zestawienia porządkujące choćby możliwe funkcje plastyczności znajdujemy w książkach szerzej obejmujących mechanikę betonu [19, 41, 49, 83] czy też w pracy Podgórskiego [86]. Wśród prac wymienionych w punkcie 2.2 pojawiały się też takie, które związki fizyczne dla betonu próbowały opisać funkcjami ustalonymi na podstawie badań eksperymentalnych nad wpływem uzwojenia na nośność słupa. W kwestii geometrii dominuje wykorzystanie modeli trójwymiarowych. Zauważalny jest też trend do wykorzystania środowisk obliczeniowych ABAQUS lub ANSYS, które umożliwiają przeprowadzenie zaawansowanych obliczeń numerycznych przy niższym wysiłku programistycznym niż w przypadku tworzenia autorskich programów MES.

Podsumowując można stwierdzić, że zjawisko skrępowania najefektywniej zachodzi w krępych, osiowo ścisanych słupach, o przekroju kołowym, z uzwojeniem z cienkich lecz gęsto ułożonych zwojów, w słupach wykonanych raczej ze słabszych betonów i przy zastosowaniu stali o niższych granicach plastyczności. Prognozowanie nośności najczęściej dokonywane jest przy wykorzystaniu zależności opracowywanych na podstawie doświadczalnej weryfikacji. Modelowanie czysto numeryczne jest mniej popularne, ale gdy już te próby są podejmowane zwykle wykorzystywane są zaawansowane modele.

3. Sformułowanie zagadnienia

Rozdział ten przedstawia założenia, na których oparty jest model obliczeniowy żelbetonowych przekrojów uzwojonych wykorzystany w dalszej części rozprawy. W pierwszej kolejności wymieniono i krótko uzasadniono przyjęte uproszczenia. Następnie zdefiniowano niewiadome w omawianym zadaniu, wykorzystując równania uogólnionego płaskiego stanu odkształcenia i zapisano sposób wprowadzania obciążenia. Kolejny podpunkt, dotyczący związków konstytutywnych, wzbogacony jest o krótki przegląd klasycznych kryteriów plastyczności. Rozdział zamyka sformułowanie warunków brzegowych i początkowych oraz przedstawienie równania pracy wirtualnej, które stanowi punkt wyjścia do rozwiązania zagadnienia.

3.1. Przyjęte założenia

Zasada de'Saint Venanta – zadanie płaskiego stanu odkształcenia

Po przeanalizowaniu wyników badań i poczynionych przez ich autorów obserwacji należy wnioskować, że widoczne efekty uzwojenia można uzyskiwać wyłącznie w krępych, ściskanych osiowo elementach. Wówczas wszystkie przekroje leżące poza obszarem głowic słupa znajdują się w płaskim stanie odkształcenia. Sam zaś obszar głowic w przytaczanych przykładach badań doświadczalnych [97, 111, 92] wykazuje wyższą wytrzymałość niż odcinek środkowy, co można tłumaczyć dodatkowym skrępowaniem przez elementy przekazujące obciążenie, bądź dobrojeniem tychże okolic.

Zasada rozmycia dyskretnego zbrojenia poprzecznego wzdłuż wysokości słupa

W pierwszej pracy, w której zaproponowano stosowanie słupów uzwojonych [21] i przedstawiono sposób określania ich nośności¹, pojawia się koncepcja *rozmycia zbrojenia poprzecznego*, określana także czasem koncepcją *zastępczego płaszcza stalowego* [54]. Kwestia rozstawu zwojów lub strzemion była przedmiotem wielu badań, o czym wspomniano

¹ Praca Considère z 1903 r. dawała bardzo optymistyczne wyniki zakładając między innymi, że – niezależnie od ilości zastosowanego zbrojenia poprzecznego – beton w stanie trójosiowego ściskania ma o 50 % wyższą wytrzymałość, a efektywność zbrojenia poprzecznego jest 2,4 raza wyższa niż podłużnego. Poglądy te zostały później zweryfikowane przez wielu badaczy. Pod względem dokładności oceny nośności należy ocenić ją krytycznie, ale przyjęte wówczas założenia i składowe nośności przekroju w znacznej części znajdują potwierdzenie.

w poprzednim rozdziale. Temat ten po analizie dostępnej literatury można podsumować stwierdzeniem, że przy odpowiednio gęstym ułożeniu strzemion (zwojów) zasada ta dobrze opisuje rzeczywiste zachowanie słupa. Badania podają różniące się granice takiego rozstawu (np. Sheikh [110] podaje $s_c \leq 0,5D_{\text{core}}$), a na wartość tę wpływa wiele czynników, takich jak właściwości użytych materiałów, średnica prętów, wymiary przekroju. W miarę wzrostu rozstawu obszar rdzenia efektywnie skrępowanego maleje, co znajduje odzwierciedlenie w różnych procedurach obliczeniowych opracowywanych na podstawie wyników badań doświadczalnych.

W niniejszej pracy zdecydowano się zastosować płaski model obliczeniowy, stosując zasadę rozmycia zbrojenia poprzecznego. Umożliwia to stosunkowo precyzyjne wyznaczenie rozkładu pól naprężenia i odkształcenia w przekroju skrępowanym, a zarazem pozwala ograniczyć nakład obliczeń w porównaniu do przypadku zastosowania modelu trójwymiarowego. Ponadto przyjęcie (dobrze zweryfikowanej w tym zagadnieniu) zasady de'Saint Venanta nieodzownie prowadzi do konkluzji, że działanie naprężeń poprzecznych jest równomierne na wysokości słupa, więc konsekwentnie przyjęto założenie, że obliczenia będą prowadzone dla przypadków, które można uznać za pozwalające na rozmycie zbrojenia.

Odrzucenie wpływu otuliny w analizie maksymalnej siły osiowej

Już od początku regularnych badań nad nośnością słupów żelbetowych [97] zauważono zjawisko odpryskiwania (w literaturze anglojęzycznej *spalling*). Odpryskiwanie otuliny zdarzało się właściwie we wszystkich opisywanych w rozdziale drugim eksperymentach, więc można założyć, że efekt taki jest powszechny w zagadnieniu ściskania elementów uzwojonych. Dochodzi do niego na skutek pojawiających się w słupie, pomiędzy podłużnymi włóknami materiału, naprężeń rozciągających, które spowodowane są różnicą odkształceń między betonem skrępowanym klatką zbrojenia a znajdującym się na zewnątrz niej. Dla zachodzenia zjawiska znaczenie ma także krucha natura materiału – znacznie wyższa wytrzymałość na ściskanie niż rozciąganie. Ściskany element betonowy doznaje wydłużeń poprzecznych, w pewnym momencie pojawiają się rysy pionowe, a następnie znajdujące się poza klatką zbrojenia włókna tracą stateczność i oddzielają się od rdzenia osłoniętego prętami zbrojenia. Maksimum siły osiowej przeniesionej przez słup zwykle przypada na fazę po odspojeniu otuliny. Mając na uwadze zachowanie rzeczywistych konstrukcji rozważano w toku przygotowywania pracy dwa podejścia:

1. kontrola naprężeń rozciągających w kontinuum betonowym na granicy rdzenia i otuliny, a po przekroczeniu wytrzymałości na rozciąganie na tej krawędzi odłączenie części przekroju. Wykonano próbne modele, w których na etapie końcowej obróbki wyników odjęto siłę z elementów znajdujących się w otulinie. Niemniej takie podejście okazuje się mało wydajne, a dodatkowo dla przekrojów innych niż osiowosymetryczne (gdzie stan

naprężenia na całym obwodzie jest stały) ustalenie właściwego momentu oddzielenia się otuliny stanowi dodatkowe zagadnienie wymagające wnikliwej analizy.

2. pominięcie otuliny w prowadzonych rozważaniach. Takie podejście jest dużo prostsze, jednocześnie nie powoduje zmiany końcowych wartości maksymalnej siły osiowej w przekroju, której wyznaczenie jest głównym celem analizy. Ponadto należy zaznaczyć, że niedoszacowaniu może podlegać jedynie zakres znajdujący się zauważalnie poniżej granicznego obciążenia, a wielkość tego niedoszacowania proporcjonalna jest do udziału otuliny w przenoszeniu naprężeń osiowych i zwykle ogranicza się do kilku – kilkunastu procent.

3.2. Uogólniony płaski stan odkształcenia

Tensor naprężenia i siła osiowa

Z uwagi na powyższe założenia naprężenia i odkształcenia można traktować jako niezależne od położenia względem trzeciej zmiennej, reprezentującej wymiar wzdłuż wysokości słupa. Pozwala to na przedstawienie tensora naprężenia (definicja – równanie (A.4)) w uproszczonej postaci:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Głównym celem prowadzonej analizy jest wyznaczenie maksymalnej siły osiowej występującej w rdzeniu przekroju. Obszar analizy pomniejszony jest o otulinę, gdyż prezentowany model nie ma mechanizmu pozwalającego na etapie analizy MES automatycznie odłączyć części przekroju, która ulega odspojeniu na skutek przekroczenia dopuszczalnych naprężeń rozciągających w płaszczyźnie przekroju. Jednocześnie na podstawie dostępnych w literaturze obserwacji badań doświadczalnych [111] wiemy o istnieniu takiego zjawiska w przypadku ściskania przekrojów skrępowanych klatką zbrojenia. Maksymalna siła osiowa przenoszona przez rdzeń przekroju uzyskiwana jest przez całkowanie odpowiedniej składowej tensora naprężenia na obszarze przekroju:

$$P = - \int_{\Omega} \sigma_{33} dx_1 dx_2. \quad (3.2)$$

Tensor odkształcenia i przemieszczenia poprzeczne

Tensor odkształcenia (zdefiniowany w równaniu (A.22)) ma postać:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

gdzie E_{33} oznacza skrócenie podłużne słupa i w rozważanym zadaniu stanowi obciążenie. Pole przemieszczeń poszukiwane jest w płaszczyźnie przekroju, wektor przemieszczenia ma zatem dwie składowe:

$$u_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Obciążenia kinematyczne

Do modelu przykładane są obciążenia kinematyczne w postaci skrócenia słupa E_{33} wymienione w równaniu (3.3). Rozważany jest element słupa o jednostkowej długości, a siły masowe grawitacji działające prostopadle do płaszczyzny przekroju odpowiadają za pomijalnie małą część całkowitego wyteżenia. Dla zachowania lepszej przejrzystości nie zostały ujęte w ostatecznej wersji modelu.

Równania równowagi

Z uwagi na płaski charakter rozwiązywanego zadania oraz fakt, że siły masowe grawitacji działające wzdłuż osi 3. (pionowej) zostały pominięte, równanie Naviera (A.2) ma postać:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0, \quad (3.5)$$

gdzie α, β przyjmują wartości 1 i 2.

Związki konstytutywne

W pracy wykorzystywane są modele sprężysto–idealnie–plastyczne zarówno do opisanego zachowania stali jak i betonu. Poszczególne modele różnią się funkcjami plastyczności oraz potencjału plastycznego, niemniej dla wszystkich prawdziwe są następujące relacje:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \dot{E}_{ij}, \quad (3.6)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}, \quad (3.7)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \begin{cases} \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{jeżeli } F(\sigma_{ij}) = 0 \text{ oraz } \dot{\lambda} \geq 0, \\ 0, & \text{jeżeli } F(\sigma_{ij}) < 0 \end{cases}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

gdzie odpowiednio kropka nad wyrażeniami oznacza ich pochodną względem czasu, zaś pozostałe oznaczenia:

ε_{ij}^e – część sprężysta tensora odkształcenia,

ε_{ij}^p – część plastyczna tensora odkształcenia,

λ – mnożnik plastyczny,

F – funkcja plastyczności,

G – potencjał plastyczny,

C_{ijkl} – tensor podatności, wyrażający się przez moduł Younga i liczbę Poissona następująco:

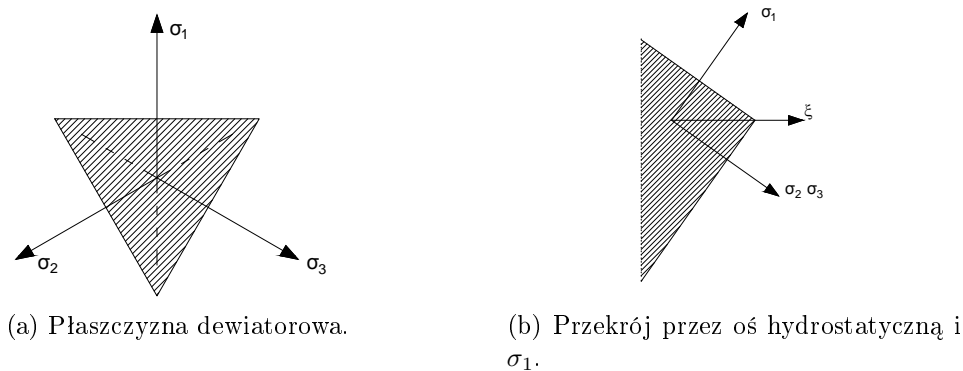
$$C_{ijkl} = \frac{1}{E} ((1 + \nu) \delta_{ik} \delta_{jl} - \nu \delta_{ij} \delta_{kl}), \quad (3.10)$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kronekera,

Przegląd wybranych kryteriów plastyczności

Podwaliny pierwszej historycznie hipotezy wytrzymałościowej (największego naprężenia normalnego) zawdzięczamy Galileuszowi choć w literaturze znana jest głównie pod nazwiskiem szkockiego fizyka i inżyniera Willama Rankine’a, który żył w XIX wieku. Dalej badacze wciąż poszukiwali miary wyteżenia materiału przez ograniczenie naprężeń normalnych, stycznych i ich kombinacji. W 1885 r. profesor uniwersytetu w Pawii E. Beltrami zapoczątkował pogląd, że to energia odkształcenia jest odpowiedzialna za zniszczenie materiału [41]. Dziewiętnaście lat później, w 1904 r. [47], pracujący wówczas we Lwowie, naukowiec i inżynier M.T. Huber, a następnie w 1913 r. pracujący w Strasburgu matematyk, R. von Mises [121] rozwijali tę koncepcję wiążąc wyteżenie z energią odkształcenia postaciowego. Niezależnie do podobnych konkluzji doszedł w 1924 r. pracujący wówczas w Delft inżynier H. Hencky. Hipoteza ta do dziś pozostaje najpopularniejszym, wyprowadzonym na drodze rozważań teoretycznych, modelem dla jednorodnych materiałów o takich samych właściwościach przy ściskaniu i rozciąganiu. Pewne mankamenty hipotezy maksymalnej energii odkształcenia postaciowego spróbował skorygować przebywający wówczas na uzupełniających studiach w Getyndze i Zurychu, W. Burzyński², który zaproponował hipotezę łączącą wpływ energii odkształcenia postaciowego i części objętościowego [18]. Jej uogólniona i uniwersalna forma pozwalała uzyskać całą rodzinę

² Włodzimierz Burzyński (1900-1970) urodzony w Przemyślu, poza działalnością naukową wspiął się w walce o niepodległość i granice Rzeczypospolitej, uczestnicząc w obronie Lwowa przed Ukraińcami w ochotniczym oddziale Orłat Lwowskich w 1918 r. i przed bolszewikami w 1920 r. Ponadto zaangażowany był w akcję plebiscytową na Spiszu i Orawie. Za swoją patriotyczną postawę zmuszony w 1946 r. przez okupacyjne władze radzieckie do opuszczenia Lwowa, po czym osiadł w Gliwicach [131].



Rysunek 3.1: Powierzchnia plastyczna – model Rankine'a.

powierzchni zniszczenia, zarówno otwartych w kierunku osi hydrostatycznej jak i zamkniętych. W późniejszym okresie, przy poszukiwaniu wiernych modeli wyężenia nowych materiałów, takich jakim wówczas był beton, coraz częściej odchodzono od prostej interpretacji wyężenia np. wielkością energii odkształcenia na rzecz kombinacji składowych napężenia lub odkształcenia, które znajdowały doświadczalną weryfikację. Przykładem tego podejścia można uznać zarówno próbę przybliżenia powierzchni zniszczenia stożkiem zaproponowaną przez Druckera i Pragera oraz wszelkie próby uogólniania hipotezy Mohra[36, 41], czy też próby aproksymacji tej powierzchni innymi funkcjami. Dla lepszego dopasowania się do wyników doświadczalnych pojawiały się też propozycje stosowania różnych funkcji zależnie od stanu napężenia. Poniżej zestawiono najpopularniejsze klasyczne kryteria plastyczności.

Kryterium Rankine'a (1857) [91]

Warunek maksymalnych napężeń normalnych został sformułowany przez W. Rankine'a w związku z jego pracami dotyczącymi mechaniki gruntów. W podstawowej wersji kryterium to przedstawia warunek maksymalnego napężenia głównego i daje się przedstawić w postaci:

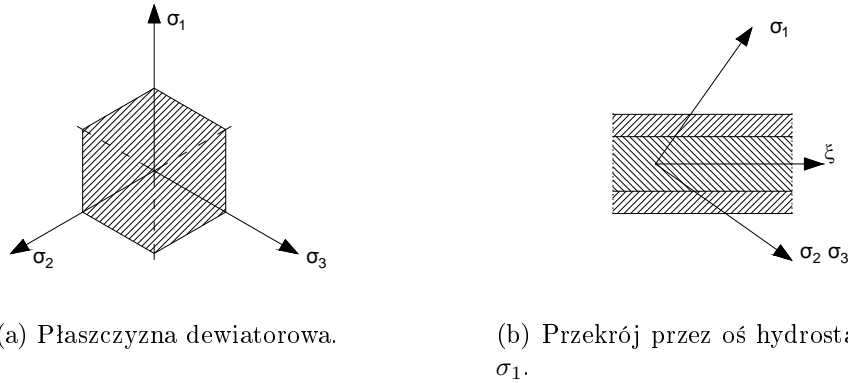
$$F_R = A \sigma_I - 1 = 0, \quad (3.11)$$

przy czym stała materiałowa A w tym wypadku przyjmie wartość:

$$A = \frac{1}{\sigma_R}, \quad (3.12)$$

gdzie σ_R oznacza wytrzymałość materiału na rozciąganie.

Powierzchnia plastyczna przyjmuje wówczas kształt ostrosłupa o podstawie trójkątnej, którego oś leży na osi ciśnienia hydrostatycznego, nieograniczonego po stronie napężeń ściskających (rys. 3.1).



Rysunek 3.2: Powierzchnia plastyczna – model Treski.

Możliwa jest również łatwa adaptacja tego kryterium w taki sposób, że ograniczenie dotyczy także minimalnych naprężeń głównych. Przy czym dla materiału kruchego, jakim jest beton, którego wytrzymałość na ściskanie jest zwykle około 10-krotnie wyższa od wytrzymałości na rozciąganie, należy wykorzystać w tym miejscu inną stałą materiałową, zastępując σ_R wytrzymałością na ściskanie σ_C . Przy zastosowaniu obydwu ograniczeń powierzchnia plastyczna przyjmuje kształt sześcianu o boku długości $\sigma_R + \sigma_C$.

Kryterium Treski (1864) [119]

Warunek ekstremalnych naprężeń stycznych stanowi pierwsze dość precyzyjne określenie wytrzymałości materiałów izotropowych. Funkcja plastyczności przedstawia się w postaci:

$$F_T = A(\sigma_I - \sigma_{III}) - 1 = 0, \quad (3.13)$$

gdzie stałą materiałową można wyrazić następująco:

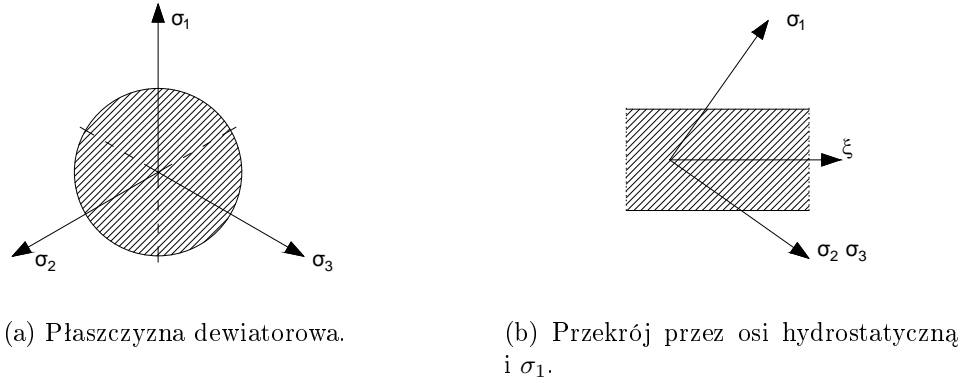
$$A = \frac{1}{\sigma_R}. \quad (3.14)$$

W równaniu (3.13) σ_I i σ_{III} oznaczają odpowiednio maksymalne i minimalne naprężenie główne.

Powierzchnia plastyczna ma kształt graniastosłupa o podstawie sześciokątnej o krawędziach równoległych do osi ciśnienia hydrostatycznego i nieograniczonego podstawami (rys. 3.2). Warunek wykorzystywany jest głównie w odniesieniu do materiałów o takiej samej wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie, takich jak wiele metali.

Kryterium Hubera–von Misesa–Hencky’ego (1904)(1913)(1924) [47, 121, 45]

Warunek ten bazuje na ograniczeniu maksymalnej energii odkształcenia postaciowego. Model ten charakteryzując się prostotą kryterium jednoparametrowego, jednocześnie dość wiernie odwzorowuje plastyczność materiałów nie wykazujących zmiany ob-



Rysunek 3.3: Powierzchnia plastyczna – model Hubera.

jętości w zakresie plastycznym. Z tego powodu jest często wykorzystywany w analizach inżynierskich, między innymi stanowi podstawową metodę wymiarowania konstrukcji stalowych wg [PN-EN-1993-1]. Funkcję plastyczności można przedstawić w postaci:

$$F_H = A\sqrt{J_2} - 1 = 0, \quad (3.15)$$

gdzie stałą materiałową można wyrazić następująco:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_R}. \quad (3.16)$$

Powierzchnia plastyczna ma kształt walca o tworzącej równoległej do osi ciśnienia hydrostatycznego i opisanego na graniastosłupie Treski (rys. 3.3).

Kryterium Mohra–Coulomba (1776) [24]

Warunek ten można przedstawić następująco:

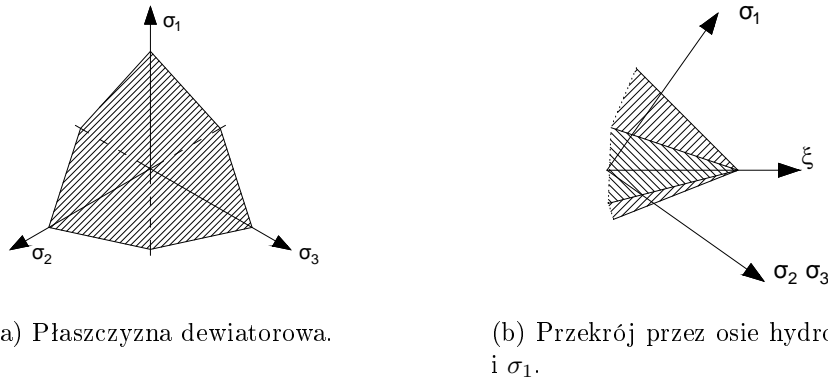
$$F_{MC} = A\sigma_I + B\sigma_{III} - 1 = 0, \quad (3.17)$$

gdzie stałe A i B można wyrazić np. przez kąt tarcia wewnętrznego ϕ i spójność c w postaci:

$$A = \frac{1 - \sin(\phi)}{2c \cos(\phi)}, \quad (3.18)$$

$$B = \frac{-1 - \sin(\phi)}{2c \cos(\phi)}. \quad (3.19)$$

Analizując równania (3.17), (3.11) i (3.13) można zauważyć, że warunek plastyczności Mohra–Coulomba stanowi rozwinięcie dwóch wcześniej wymienionych kryteriów w zakresie składowych stanu naprężenia wpływających na wyteżenie i dla szczególnych wartości stałych A i B może zostać zredukowany do warunku Rankine'a lub Treski.



Rysunek 3.4: Powierzchnia plastyczna – model Mohra–Coulomba.

W ogólności powierzchnia plastyczna przyjmuje kształt ostrosłupa o przekroju sześciokąta rozpiętego wokół osi ciśnienia hydrostatycznego, nieograniczonego podstawą po stronie naprężeń ściskających (rys. 3.4).

Warunek przedstawiony w równaniu (3.17) można przedstawić również w innej postaci:

$$F_{MC} = -p \sin(\phi) + q \left(\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{3}} - \frac{\sin(\phi) \sin(\theta)}{3} \right) - c \cos(\phi), \quad (3.20)$$

gdzie p i q są niezmiennikami stanu naprężenia określonymi według wzorów (A.13) i (A.14), a θ jest kątem Lodego, którego definicja jest przywołana we wzorze (A.19).

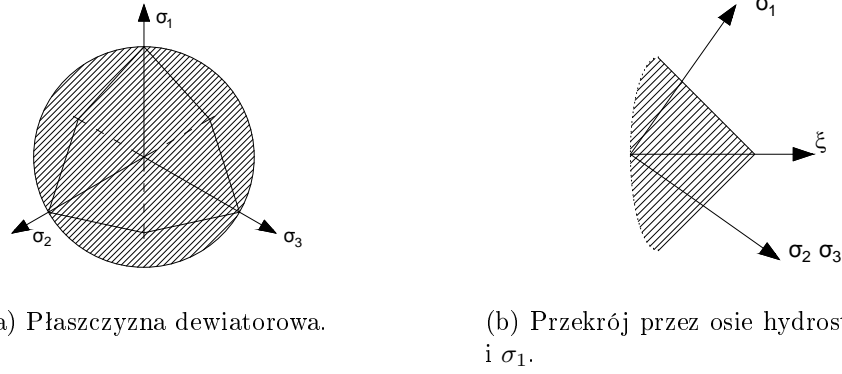
Warunek ten wywodzi się zasadniczo z mechaniki gruntów, lecz odnajduje zastosowanie także dla materiałów ziarnistych i betonu. Powstają także zmodyfikowane wersje kryterium, czego przykłady można odnaleźć w wielu różnych pracach np. [90, 113, 13]. Zmodyfikowane wersje lepiej oddają kształt powierzchni zniszczenia materiałów, dla których są tworzone.

Kryterium Druckera–Pragera (1952) [28]

Warunek Druckera–Pragera związany jest z wcześniej przedstawionym warunkiem plastyczności Mohra–Coulomba i przyjmuje postać równania stożka opisanego, wpisanego bądź przenikającego w odniesieniu do ostrosłupa Mohra–Coulomba, zależnie od przyjętych definicji współczynników. Z uwagi na charakter rozważanego w niniejszej pracy zadania najlepsze rezultaty możemy uzyskać stosując stożek opisany (rys. 3.5). Przekrój skrępowanego słupa poddawany jest silnym naprężeniom ściskającym wzdłuż swojej osi i zauważalnie mniejszym (wewnątrz rdzenia także głównie ściskającym) naprężeniom w płaszczyźnie przekroju.

Funkcję plastyczności możemy opisać wzorem:

$$F_{DP} = A\sqrt{J_2} + B I_1 - 1 = 0. \quad (3.21)$$



(a) Płaszczyzna dewiatorowa. (b) Przekrój przez osie hydrostatyczną i σ_1 .

Rysunek 3.5: Powierzchnia plastyczna – model Druckera–Pragera.

W przypadku stożka opisanego stałe przyjmują następujące wartości:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_C + \sigma_R}{\sigma_C \sigma_R}, \quad (3.22)$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{\sigma_C - \sigma_R}{\sigma_C \sigma_R}. \quad (3.23)$$

W dalszych rozważaniach wykorzystywano także warunek Druckera–Pragera w bardziej tradycyjnym ujęciu w uzależnieniu od kąta tarcia wewnętrznego ϕ i spójności c materiału oraz wykorzystując inny zestaw niezmienników.

$$F_{DP} = q - m p - k, \quad (3.24)$$

gdzie:

$$m = \frac{6 \sin(\phi)}{3 + \sin(\phi)}, \quad k = \frac{6c \cos(\phi)}{3 + \sin(\phi)}. \quad (3.25)$$

Definicje niezmienników p i q przywołane są w dodatku A w równaniach (A.13), (A.14).

Kryterium Willama–Warnkego – opis trzyparametrowy (1974) [124]

Warunek ten można przedstawić w następującej formie:

$$F_{WW3} = A I_1 + \lambda(J_2, J_3) - 1 = 0, \quad (3.26)$$

gdzie A jest wartością stałą określaną na podstawie stałych materiałowych, zaś $\lambda(J_2, J_3)$ jest pewną funkcją zależną od drugiego i trzeciego niezmiennika dewiatora stanu naprężenia i stałych materiałowych. Przyjmując następujące oznaczenia:

σ_C – wytrzymałość na jednoosiowe ściskanie,

σ_R – wytrzymałość na jednoosiowe rozciąganie,

σ_B – wytrzymałość na dwuosiowe równomierne ściskanie,

$r(\theta)$ – promień powierzchni plastycznej na płaszczyźnie dewiatorowej w funkcji kąta Lodego,

r_t – promień minimalny odpowiadający kątowi Lodego $\theta = 0^\circ$,

r_c – promień maksymalny odpowiadający kątowi Lodego $\theta = 60^\circ$,

$$A = \frac{1}{3z} \frac{1}{\sigma_C}, \quad (3.27)$$

gdzie:

$$z = \frac{\sigma_B \sigma_R}{\sigma_C (\sigma_B - \sigma_R)}. \quad (3.28)$$

Funkcja $\lambda(J_2, J_3)$ może zostać przedstawiona jak niżej, przy czym w związku z równaniem (A.18), należy zauważyć, że θ jest także funkcją J_2 i J_3 :

$$\lambda(J_2, J_3) = \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{r(\theta)} \frac{\sqrt{J_2}}{\sigma_C}, \quad (3.29)$$

gdzie:

$$r(\theta) = \frac{u(\theta) + v(\theta)}{w(\theta)}, \quad (3.30)$$

$$u(\theta) = 2r_C (r_c^2 - r_t^2) \cos(\theta), \quad (3.31)$$

$$v(\theta) = r_c (2r_t - r_c) \sqrt{4(r_c^2 - r_t^2) \cos(\theta) + 5r_t^2 - 4r_c r_t}, \quad (3.32)$$

$$w(\theta) = 4(r_c^2 - r_t^2) \cos(\theta) + (r_c - 2r_t)^2, \quad (3.33)$$

gdzie promienie r_c i r_t można wyrazić używając wcześniej wprowadzonych wielkości σ_C , σ_R , σ_B :

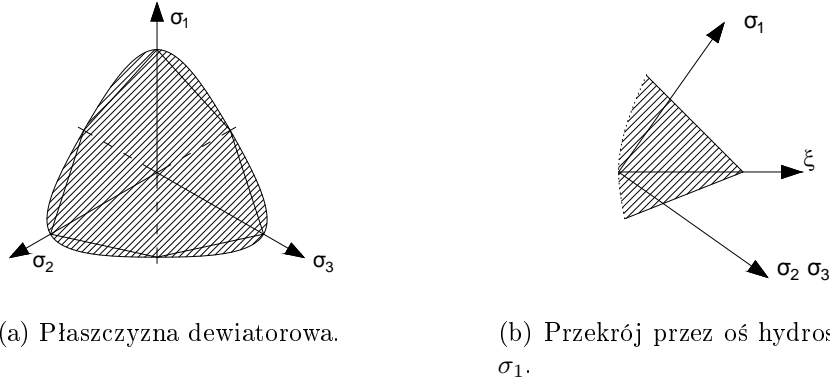
$$r_c = \sqrt{\frac{6}{5}} \left(\frac{\sigma_B \sigma_R}{3\sigma_B \sigma_R + \sigma_C (\sigma_B - \sigma_R)} \right), \quad (3.34)$$

$$r_t = \sqrt{\frac{6}{5}} \left(\frac{\sigma_B \sigma_R}{\sigma_C (2\sigma_B + \sigma_R)} \right). \quad (3.35)$$

Przybliżoną wizualizację powierzchni plastyczności zamieszczono na rysunku 3.6.

Kryterium Breslera–Pistera (1958) [16]

Warunek Breslera–Pistera stanowi rozszerzenie warunku Druckera–Pragera. Funkcja plastyczności jest trzyparametrowa i w porównaniu z modelem Druckera–Pragera



Rysunek 3.6: Powierzchnia plastyczna – model Willama–Warnkego.

umożliwia zdefiniowanie powierzchni zamkniętej. Wzór ogólny można przedstawić następująco:

$$F_{BP} = A\sqrt{J_2} + B I_1 + C I_1^2 - 1 = 0. \quad (3.36)$$

Stałe materiałowe można wyrazić następująco:

$$A = \sqrt{3} \frac{(\sigma_C + \sigma_R)(2\sigma_B - \sigma_C)(2\sigma_B + \sigma_C)}{\sigma_C \sigma_R \sigma_B (\sigma_R + 8\sigma_B - 3\sigma_C)}, \quad (3.37)$$

$$B = \frac{(\sigma_C - \sigma_R)(\sigma_B \sigma_C + \sigma_B \sigma_R - \sigma_C \sigma_R - 4\sigma_B^2)}{\sigma_C \sigma_t \sigma_b (\sigma_t + 8\sigma_b - 3\sigma_c)}, \quad (3.38)$$

$$C = \frac{\sigma_B \sigma_C - 3\sigma_B \sigma_R + 2\sigma_C \sigma_R}{\sigma_C \sigma_R \sigma_B (\sigma_R + 8\sigma_B - 3\sigma_C)}. \quad (3.39)$$

W literaturze dostępne są także inne warianty tego warunku plastyczności. Warto nadmienić, że istnieje forma zredukowana do 2 parametrów materiałowych [32] w postaci:

$$F_{EW} = \sqrt{J_2} + A I_1 + B I_1^2 = 0, \quad (3.40)$$

wówczas stałe materiałowe można wyrazić następująco:

$$A = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (3.41)$$

$$B = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_R}{\sigma_C^2 - \sigma_R^2} \right). \quad (3.42)$$

Łatwo zauważyć, że w powyższym równaniu (3.40) punkt odpowiadający zerowemu stanowi naprężenia znajduje się na powierzchni plastycznej.

Kryterium Ottosena (1977) [81]

Postać ogólna funkcji plastyczności w tym kryterium jest następująca:

$$F_{OT} = A J_2 + \lambda(\theta) \sqrt{J_2} + B I_1 - 1 = 0. \quad (3.43)$$

Model czteroparametrowy Ottosena ma zbliżoną budowę do zaprezentowanego powyżej modelu Willama–Warnkego, w obydwu modelach dwa parametry użyte są do opisu krzywej zniszczenia na płaszczyźnie dewiatorowej i wykorzystano do tego celu wprowadzoną funkcję promienia $\lambda(\theta)$ – choć różni je sposób ich wyprowadzenia. Ponadto ten model pozwala uzyskać krzywoliniowy ślad powierzchni plastycznej na płaszczyznach zawierających oś ciśnienia hydrostatycznego. W szczególnych przypadkach, gdy $A = 0$ i $\lambda(\theta) = \text{const.}$ otrzymujemy model Druckera–Pragera, a gdy dodatkowo stała $B = 0$, warunek plastyczności redukuje się do kryterium Hubera–Misesa.

Funkcja $\lambda(\theta)$ powiązana jest z promieniem na płaszczyźnie dewiatorowej $r(\theta)$ następująco:

$$\lambda(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}. \quad (3.44)$$

Ponadto zachodzi związek:

$$\lambda = k_1 \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} (-k_2 \cos(3\theta)) \right) \quad \text{dla} \quad \cos 3\theta \geq 0, \quad (3.45)$$

$$\lambda = k_1 \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cos^{-1} (-k_2 \cos(3\theta)) \right) \quad \text{dla} \quad \cos 3\theta \leq 0, \quad (3.46)$$

gdzie k_1 i k_2 są stałymi, przy czym k_1 jest współczynnikiem skali, a k_2 współczynnikiem kształtu krzywej będącej śladem powierzchni plastycznej na płaszczyźnie dewiatorowej. Funkcja przyjmuje skrajne wartości, związane z południkiem ściskany i rozciągany, odpowiednio dla wartości kąta Lodego $\theta = 60^\circ$ i $\theta = 0^\circ$:

$$\lambda_c = \frac{1}{r_c} \quad \text{dla} \quad \theta = 60^\circ, \quad (3.47)$$

$$\lambda_t = \frac{1}{r_t} \quad \text{dla} \quad \theta = 0^\circ. \quad (3.48)$$

Kryterium Hsieha–Tinga–Chena (1982) [19]

Ogólna postać powierzchni plastycznej może być przedstawiona w postaci funkcji:

$$F_{HTC} = A J_2 + B \sqrt{J_2} + C \sigma_1 + D I_1 - 1 = 0. \quad (3.49)$$

Zauważmy, że w szczególnych przypadkach:

- 1) gdy $A = B = D = 0$ uzyskujemy kryterium Rankine'a tzn. maksymalnego naprężenia normalnego,
- 2) gdy $A = C = D = 0$ uzyskujemy kryterium Hubera–von Misesa–Henky'ego,
- 3) gdy $A = C = 0$ uzyskujemy kryterium Druckera–Pragera.

W przeciwieństwie do wyżej zaprezentowanego modelu Ottosena rozpatrywany model nie zapewnia bezwzględnie gładkości powierzchni plastycznej. Można uznać, że stanowi on uogólnienie i rozwinięcie modelu Mohra–Coulomba [19] i w konsekwencji na południkach ściskanych może pozostać ostra krawędź.

Kryterium Willama–Warnkego – opis pięcioparametrowy (1974) [124]

Model ten w części pokrywa się z przedstawionym wcześniej kryterium tych samych autorów w opisie trzyparametrowym. W postaci ogólnej funkcja plastyczności może być przedstawiona następująco:

$$F_{\text{WW5}} = \lambda(I_1, J_2, J_3) - 1 = 0, \quad (3.50)$$

gdzie $\lambda(I_1, J_2, J_3)$ jest pewną funkcją wymienionych niezmienników stanu naprężenia, opisującą kształt powierzchni plastyczności analogicznie jak w równaniu (3.29), przy czym:

$$\lambda(I_1, J_2, J_3) = \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{r(I_1, \theta)} \frac{\sqrt{J_2}}{\sigma_C}. \quad (3.51)$$

W przeciwieństwie do modelu trzyparametrowego, gdzie przekroje powierzchni plastycznej płaszczyznami zawierającymi oś ciśnienia hydrostatycznego były dwoma półprostymi o wspólnym wierzchołku, tak w niniejszym przypadku przekroje te są krzywoliniowe i składają się z fragmentów dwóch parabol o wspólnym wierzchołku. Funkcja $r(I_1, \theta)$ podobnie jak w modelu trzyparametrowym opisuje promień śladu powierzchni plastycznej na płaszczyźnie dewiatorowej i analogicznie jak w równaniu (3.30) jest zdefiniowana następująco:

$$r(I_1, \theta) = \frac{u(I_1, \theta) + v(I_1, \theta)}{w(I_1, \theta)}, \quad (3.52)$$

gdzie funkcje $u(I_1, \theta)$, $v(I_1, \theta)$, $w(I_1, \theta)$ – przedstawione niżej – odpowiadają tym w równaniach (3.31), (3.32), (3.33):

$$u(I_1, \theta) = 2r_c(I_1) (r_c^2(I_1) - r_t^2(I_1)) \cos(\theta), \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} v(I_1, \theta) &= r_c(I_1) (2r_t(I_1) - r_c(I_1)) \cdot \\ &\cdot \sqrt{4(r_c^2(I_1) - r_t^2(I_1)) \cos^2(\theta) + 5r_t^2(I_1) - 4r_c(I_1)r_t(I_1)}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$w(I_1, \theta) = 4 (r_c^2(I_1) - r_t^2(I_1)) \cos^2(\theta) + (r_c(I_1) - 2r_t(I_1))^2. \quad (3.55)$$

Funkcje opisujące promienie: minimalny $r_t(I_1)$, odpowiadający kątowemu Lodego $\theta = 0^\circ$ i maksymalny $r_c(I_1)$, odpowiadający kątowemu Lodego $\theta = 60^\circ$ zdefiniowane są następująco:

$$r_t(I_1) = a_0 + \frac{I_1}{3\sigma_C} a_1 + \left(\frac{I_1}{3\sigma_C} \right)^2 a_2, \quad (3.56)$$

$$r_c(I_1) = b_0 + \frac{I_1}{3\sigma_C} b_1 + \left(\frac{I_1}{3\sigma_C} \right)^2 b_2, \quad (3.57)$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, \sigma_C$ są stałymi materiałowymi, przy czym należy zastrzec, że tylko 5 z nich jest niezależnych, gdyż równania (3.56) i (3.57) muszą dodatkowo spełnić warunek występowania tylko jednego miejsca zerowego. Opisana sytuacja fizycznie ma miejsce w wierzchołku leżącym na osi hydrostatycznej, gdzie zniszczenie następuje przez równomierne trójosiowe rozciąganie. Sposoby wyznaczania stałych materiałowych opisane są w pracy [124]. W ogólności konieczne jest znalezienie 5 punktów zniszczenia, które pozwolą jednoznacznie opisać 2 parabole stanowiące ślad powierzchni plastycznej dla kątów Lodego $\theta = 0^\circ$ i $\theta = 60^\circ$. Pomiedzy nimi, w płaszczyznach dewiatorowych, ma miejsce interpolacja o eliptycznym kształcie opisana wzorem (3.52).

Prawo płynięcia

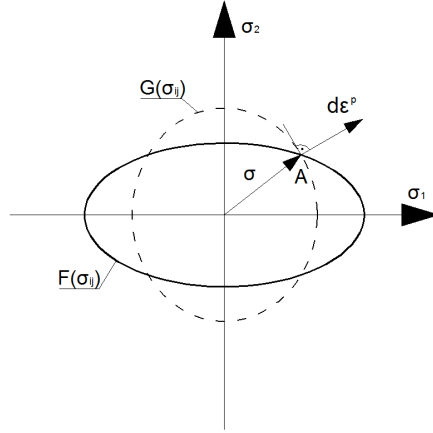
Pod pojęciem prawa płynięcia rozumiany jest związek przywołany w równaniu (55), opisujący sposób obliczania przyrostów odkształcenia w stanie plastycznym

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (3.58)$$

Funkcja G nazywana jest potencjałem plastycznym i służy określeniu kierunku przyrostu odkształcenia plastycznego. W szczególnym przypadku, niemniej w praktyce często stosowanym, funkcja ta jest tożsama z funkcją plastyczności $G = F$. Przypadek taki nazywany jest stowarzyszonym prawem płynięcia i podejście to dla pewnych materiałów jest uzasadnione. W każdym innym przypadku, gdy $G \neq F$, mamy do czynienia z niestowarzyszonym prawem płynięcia (patrz rys. 3.7). Z uwagi na konieczność spełnienia postulatu Druckera [27] o stabilności materiału funkcja ta nie może być w pełni dowolna, ale na tym etapie rozważań nie wprowadzamy ograniczeń.

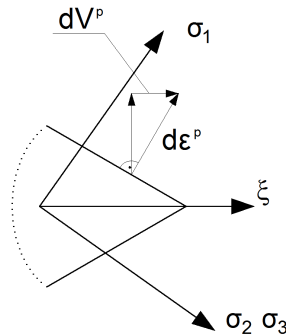
Stosowanie funkcji potencjału plastycznego G reprezentowanego powierzchnią nierównoległą do osi hydrostatycznej – przypadek taki ma miejsce gdy stosowane jest niestowarzyszone prawo płynięcia dla warunku Hubera lub Tresci oraz dla każdego innego warunku plastyczności gdzie kąt dylatacji³ nie jest stały i zawsze równy 0 – prowadzi do

³ Kąt dylatacji jest stałą materiałową wykorzystywaną w modelach z niestowarzyszonym prawem



Rysunek 3.7: Dwuwymiarowa ilustracja warunku plastyczności i prawa płynięcia. Przedstawiono wykresy funkcji plastyczności F oraz potencjału plastyczności G określonej dla uplastycznienia w dowolnym punkcie A oznaczonym na rysunku. Kierunek przyrostu odkształceń plastycznych $d\varepsilon^P$ jest prostopadły do G w punkcie A .

zaobserwowania zjawiska zmiany objętości materiału w stanie plastycznym. Zjawisko to nazwano dylatacją. Schematyczne wyjaśnienie przedstawiono na rysunku 3.8.



Rysunek 3.8: Przyrost odkształceń plastycznych w modelu Druckera–Pragera ze stowarzyszonym prawem płynięcia. W przypadku stowarzyszonym ($d\varepsilon^P$ pozostaje prostopadły do powierzchni plastycznej) obserwujemy składową równoległą do osi hydrostatycznej, która odpowiada za zmianę objętości dV^P .

Warunki brzegowe

Naprężeniowe warunki brzegowe określone są na całym brzegu obszaru rdzenia $\partial\Omega$ w postaci zerowego wektora naprężenia:

$$\sigma_{\alpha\beta}n_{\beta} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (3.59)$$

gdzie n_{α} oznacza jednostkowy wektor normalny do brzegu przekroju.

płynięcia. W niniejszej pracy, oraz zwykle w literaturze oznaczana symbolem ψ . W funkcji potencjału plastycznego G pełni analogiczną rolę jak kąt tarcia wewnętrznego ϕ w funkcji plastyczności F . Jego wielkość odpowiada za przyrost objętości uplastycznionego materiału.

Z uwagi na to, że niewiadome jest pole przemieszczenia, dla uzyskania jednoznacznego rozwiązania konieczne jest wprowadzenie blokady przynajmniej trzech stopni swobody poprzez kinematyczne warunki brzegowe, które wyeliminują ruch sztywny całego przekroju. W wielu przykładach warunek ten spełniany jest przez wykorzystanie osi symetrii. W sytuacji gdy przekrój jest symetryczny względem osi, na każdej z nich można przedstawić następujące warunki symetrii:

$$u_n = 0, \sigma_T = 0 \quad \text{na } \partial\Omega_{\text{sym}}, \quad (3.60)$$

gdzie u_n oznacza składową normalną od osi symetrii, zaś σ_T oznacza składową styczną do osi symetrii.

Spełnienie powyższych warunków na przynajmniej dwóch osiach gwarantuje wyeliminowanie ruchu sztywnego przekroju słupa.

Warunki początkowe

Warunki początkowe stanowią zerowe pole naprężenia i zerowe pole przemieszczenia w całym obszarze przekroju Ω .

$$u_\alpha = 0, \sigma_{ij} = 0 \quad \text{w } \Omega. \quad (3.61)$$

3.3. Sformułowanie słabe

Przedstawione zagadnienie rozwiązano wykorzystując równanie pracy wirtualnej [136]. Sformułowanie wariacyjne przedstawia się następująco:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \delta\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) d\Omega + \oint_S A \dot{\sigma} \delta\varepsilon ds = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in V_0, \quad (3.62)$$

gdzie $\delta\mathbf{u}$ oznacza wariację pola przemieszczenia V_0 jest przestrzenią pól kinematycznie dopuszczalnych, które są odpowiednio ciągłe i spełniają warunki brzegowe. Pierwszy z członów równania odpowiada pracy sił wewnętrznych w rdzeniu betonowym, drugi w zbrojeniu poprzecznym, przy czym A oznacza pole przekroju zbrojenia poprzecznego, zaś σ jest wartością panującego w nim naprężenia (w zbrojeniu poprzecznym modelowany jest jednoosiowy stan naprężenia). Zbrojenie podłużne nie jest ujęte w modelu obliczeniowym, a jego wpływ został uwzględniony na etapie obróbki wyników. Poszukiwane rozwiązanie równania (3.62) musi spełniać związki konstytutywne:

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p - \dot{E}_{kl} \right), \quad (3.63)$$

gdzie:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}), \quad (3.64)$$

$$\varepsilon_{ij}^p = \begin{cases} \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{jeżeli } F(\sigma_{ij}) = 0 \text{ oraz } \dot{\lambda} \geq 0, \\ 0, & \text{jeżeli } F(\sigma_{ij}) < 0 \end{cases}, \quad (3.65)$$

oraz warunki początkowe:

$$u_i(0) = 0, \quad \sigma_{ij}(0) = 0. \quad (3.66)$$

Zważywszy, że w prezentowanym modelu rolę obciążenia pełni odkształcenie $\varepsilon_{33} = -E_{33}$, w zakresie liniowej sprężystości równanie (3.62) możemy sprowadzić do postaci:

$$\int_{\Omega} (D_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} + D_{\alpha\beta 33} \varepsilon_{33}) \delta \varepsilon_{\alpha\beta} d\Omega + \oint_S A \sigma \delta \varepsilon ds = 0, \quad (3.67)$$

przy czym tensor naprężenia σ_{ij} przedstawiono jako iloczyn tensora sprężystości D_{ijkl} i tensora odkształcenia ε_{kl} . Porządkując powyższe równanie otrzymujemy:

$$\int_{\Omega} D_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} d\Omega + \oint_S A \sigma \delta \varepsilon ds = \int_{\Omega} D_{\alpha\beta 33} E_{33} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} d\Omega. \quad (3.68)$$

4. Rozwiązanie zagadnienia

Do rozwiązania zagadnienia ściskania osiowego skrępowanego przekroju betonowego wykorzystano metodę elementów skończonych w ujęciu przemieszczeniowym, w modelu dwuwymiarowym. Poniższy rozdział obejmuje zwięzły opis metod i narzędzi wykorzystanych do uzyskania rozwiązania wcześniej zdefiniowanego problemu. W początkowej części przedstawiono matematyczne podstawy zastosowanych algorytmów, następnie opis zastosowanych elementów skończonych. W dalszej części omówiono wykorzystane w pracy sposoby ustalania stałych materiałowych. Zakończenie rozdziału stanowi punkt poświęcony przedstawieniu oprogramowania, które wykorzystano do przygotowania przykładów obliczeniowych zamieszczonych w dalszej części dysertacji.

4.1. Dyskretyzacja zagadnienia

W celu wyznaczenia pól przemieszczeń i naprężeń w zadaniu sformułowanym w poprzednim rozdziale wykorzystano przemieszczeniowe ujęcie metody elementów skończonych, gdzie rolę głównych niewiadomych odgrywają przemieszczenia węzłów. Zagadnienie początkowo-brzegowe sformułowane w punkcie 3.3 należy zdyskretyzować względem czasu i przestrzeni.

Dyskretyzacja względem przestrzeni sprowadza się do podziału obszaru zadania na skończoną liczbę elementów, na których pole przemieszczeń wyrażone jest za pomocą funkcji bazowych (kształtu) oraz wartości przemieszczeń węzłowych. Po dokonaniu dyskretyzacji obszaru i zastosowaniu interpolacji elementami skończonymi pola przemieszczeń, równanie pracy wirtualnej (3.62) można przedstawić następująco:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \oint_S A \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \, d\Omega, \quad (4.1)$$

gdzie:

\mathbf{B} jest macierzą zależności odkształcenie przemieszczenie (macierzą pochodnych funkcji kształtu) elementów powierzchniowych,

$\bar{\mathbf{B}}$ jest macierzą zależności odkształcenie przemieszczenie (macierzą pochodnych funkcji kształtu) elementów prętowych,

$\boldsymbol{\sigma}$ jest wektorem naprężenia elementów powierzchniowych, $\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$.

$\bar{\sigma}$ jest macierzą jednoelementową naprężenia elementów prętowych, $\bar{\sigma} = \{\sigma\}$.

σ_0 jest wektorem naprężenia wywołanego wymuszonym odkształceniem.

Wiedząc, że w ogólności $\sigma = \mathbf{D}\varepsilon$, gdzie \mathbf{D} oznacza macierz sprężystości (lub ogólniej macierz sprężysto–plastyczną) oraz wykorzystując relację $\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{u}$, gdzie przez \mathbf{u} rozumiemy wektor przemieszczeń węzłowych, zaś przez ε_0 wektor wymuszonych odkształceń, otrzymamy w rezultacie:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} \, d\Omega + \oint_S A \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u} \, ds = - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \varepsilon_0 \, d\Omega \quad (4.2)$$

Dyskretyzacja względem czasu w zagadnieniu quasi–statycznym, z jakim mamy do czynienia w rozważanym zadaniu, prowadzi do zastosowania metody przyrostowej. Rozważa się chwile czasu $0 < t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = T$. Każdej z chwil odpowiada kolejny przyrost obciążenia. Zakłada się przy tym, że pochodna względem czasu jest przybliżona przez iloraz różnicowy:

$$\dot{\mathbf{u}}(t_n) \approx \frac{\Delta \mathbf{u}^n}{\Delta t_n} = \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{t_n - t_{n-1}}. \quad (4.3)$$

Analogicznie do przyrostów przemieszczeń określane są przyrosty naprężeń. Następnie w każdej chwili czasu wyznaczane jest rozwiązanie równania (4.2) (\mathbf{u}^1, σ^1) , (\mathbf{u}^2, σ^2) , \dots , (\mathbf{u}^n, σ^n) , \dots , (\mathbf{u}^N, σ^N) . Przy czym punkt wyjścia (wstępne naprężenia i odkształcenia) ustalone są na podstawie rozwiązania poprzednich kroków, tzn. $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^{n-1} + \Delta \mathbf{u}^n$ przy $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ i analogicznie w przypadku naprężeń. Rozwiązanie zadania równowagi w każdej z chwil odbywa się metodą iteracyjną.

4.2. Metoda przyrostowo–iteracyjna

Układ równań określony równaniem macierzowym (4.2) jest nieliniowy i do jego rozwiązania wykorzystywana jest metoda przyrostowo–iteracyjna według algorytmu przedstawionego w monografii Więckowskiego [123]. W poprzednim podpunkcie wyjaśniono podział obciążenia na przyrosty. Poszczególne kroki obciążenia nie muszą być jednakowe lecz ich suma równa jest całkowitemu obciążeniu. Schemat iteracji w każdym kolejnym n -tym przyroście obciążenia jest następujący:

1. Przyjęcie początkowych wartości przyrostów przemieszczeń i naprężeń w punktach całkowania numerycznego

$$\Delta \mathbf{u}^{n(0)} = 0, \Delta \sigma^{n(0)} = 0.$$

2. Obliczenie przybliżenia i -tej iteracji. Najpierw zastąpienie numeru poprzedniej iteracji aktualną $i := i + 1$ (w pierwszym kroku $i = 1$). Następnie wykonywane jest obliczenie

przybliżenia przyrostu $\Delta \mathbf{u}^{n(i)}$ przez rozwiązanie zagadnienia liniowego

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} (\Delta \mathbf{u}^{n(i)} - \Delta \mathbf{u}^{n(i-1)}) \, d\Omega + \oint_S \mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}} (\Delta \mathbf{u}^{n(i)} - \Delta \mathbf{u}^{n(i-1)}) \, ds = \\ = - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{n(i-1)} \, d\Omega. \end{aligned}$$

Globalny układ równań nieliniowych rozwiązywany jest w programie FENAP z wykorzystaniem zmodyfikowanej metody Newtona–Raphsona o stałej macierzy sztywności układu. W stosunku do metody niezmodyfikowanej wymaga ona zwykle wykonania większej liczby iteracji dla uzyskania zakładanej dokładności rozwiązania, ale oszczędza czas, który w podstawowej wersji metody potrzebny jest na aktualizację macierzy sztywności w kolejnych iteracjach.

3. Sprawdzenie warunku plastyczności w punktach całkowania numerycznego. W punktach, w których stwierdzone jest uplastycznienie wykonywane jest obliczanie iteracyjne naprężeń plastycznych i mnożnika plastycznego, oraz obliczenie przyrostu odkształceń plastycznych. Szczegóły tego procesu opisano w kolejnym punkcie rozdziału.
4. Sprawdzenie dokładności rozwiązania. Jeżeli warunek nie jest spełniony powrót do punktu 2., jeśli jest – następuje przejście do kolejnej chwili czasu (następnego przyrostu obciążenia).

4.3. Aktualizacja stanu naprężenia

Do obliczenia składowych tensorów naprężenia i odkształcenia w stanie po uplastycznieniu materiału wykorzystywane jest podejście niejawne i algorytm *return mapping* opisany w książce Zienkiewicza [136]. W pierwszej kolejności, dla n -tego kroku obciążenia, obliczane jest tzw. rozwiązanie próbne (sprężyste) $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{TR}} = \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{p}})$, gdzie tensor sprężystości \mathbf{D} jest stały. Ten krok pozwala sprawdzić czy na danym poziomie obciążenia dochodzi do uplastycznienia przekroju, tzn. $F(\boldsymbol{\sigma}^{\text{TR}}) > 0$. Następnie przyjmując, że $\dot{\boldsymbol{\sigma}} \Delta t = \Delta \boldsymbol{\sigma}$ oraz $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \Delta t = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ przyrost tensora naprężenia w n -tym kroku obciążenia opisany będzie równaniem:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{p}} - \mathbf{E}), \quad (4.4)$$

gdzie indeksem górnym p oznaczono tensor odkształceń plastycznych, który z kolei na podstawie związków fizycznych można wyrazić:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{p}} = \Delta \lambda \left[(1 - \theta) \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_n + \theta \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} \right], \quad (4.5)$$

przy czym parametr $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ lecz poszukując rozwiązania *wstecz*, w obliczeniach jest zastosowana wartość $\theta = 1$. Dodatkowo należy zauważyć, że rozwiązanie w następnym

kroku obciążenia powinno spełniać warunek plastyczności, co oznacza, że:

$$F_{n+1} = 0. \quad (4.6)$$

Następnie można zapisać równania rezyduów w i -tej iteracji:

$$\mathbf{R}_\sigma^i = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n - \mathbf{D}^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^i - \Delta \lambda \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1}^i, \quad (4.7)$$

$$r^i = -F_{n+1}^i. \quad (4.8)$$

Układ równań, który podlegać będzie rozwiązaniu można za [136] ostatecznie przedstawić w postaci:

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{D}^{-1} + \Delta \lambda \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} & \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T & 0 \end{array} \right]_{n+1}^i \left\{ \begin{array}{c} d\boldsymbol{\sigma}^i \\ d\lambda^i \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R}_\sigma^i \\ r^i \end{array} \right\}. \quad (4.9)$$

Wówczas do rozwiązania możemy dojść stosując metodę iteracyjną Newtona–Raphsona, dążąc do zerowania wartości rezyduów. Ostatecznie wyznaczony przyrost wielkości na danym stopniu obciążenia jest sumą wyników na poszczególnych krokach iteracji:

$$\Delta \lambda^i = \sum_{j=0}^i d\lambda^j. \quad (4.10)$$

Można w tym miejscu zaznaczyć, że w przypadku rozważania przyrostów pracy odkształcenia plastycznego \dot{W}^p przyrost mnożnika plastycznego $\dot{\lambda}$ jest w pewnym sensie miarą tej pracy i może przyjmować wyłącznie wartości nieujemne:

$$\dot{W}^p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \sigma_{ij} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \geq 0. \quad (4.11)$$

Jeżeli funkcja potencjału plastycznego G pozostaje wypukła, wówczas iloczyn skalarny $\sigma_{ij} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}$ pozostaje nieujemny. Zarazem spełniony będzie postulat Druckera.

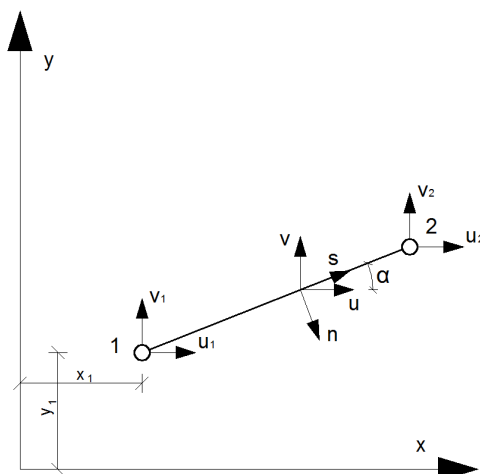
4.4. Opis stosowanych elementów skończonych

Elementy wykorzystane w pracy opracowano w oparciu o metody zaproponowane przez O. Zienkiewicza w książce [136].

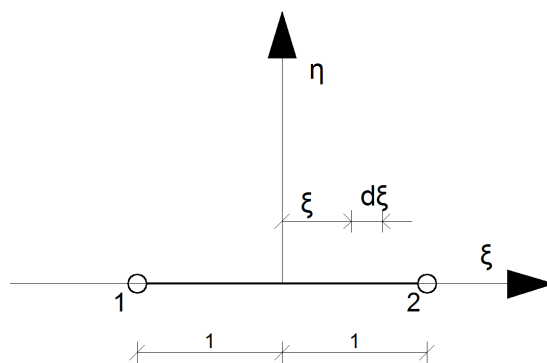
Element prętowy 2-węzłowy

Ten jednowymiarowy element wykorzystano do modelowania zbrojenia poprzecznego w tych przykładach, gdzie do modelowania continuum rdzenia betonowego użyto elementów trójkątnych klasy C^0 z liniowymi funkcjami kształtu. Jest to klasyczny ele-

ment kratownicowy o 2 węzłach, po 2 stopnie swobody w każdym, które odpowiadają składowym wektora przemieszczenia tych węzłów na płaszczyźnie (rys. 4.1). W elemencie obliczana jest jedna wielkość statyczna – naprężenie normalne w przekroju poprzecznym pręta.



Rysunek 4.1: Element prętowy dwuwęzłowy.



Rysunek 4.2: Element prętowy dwuwęzłowy znormalizowany, współrzędne naturalne.

Funkcje kształtu

Na rysunku 4.2 przedstawiono omawiany element we współrzędnych lokalnych. Funkcje kształtu możemy uzyskać wykorzystując wielomiany Lagrange'a:

$$L_i^n = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_{n-1})(\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_n)}, \quad (4.12)$$

gdzie:

n – stopień wielomianu Lagrange’a, który jest o 1 niższy niż liczba węzłów elementu

i – numer węzła, dla którego budowana jest funkcja kształtu.

W omawianym przypadku przyjmować należy wartości $n = 1$ oraz $i = 1, 2$. Prowadzi to do rezultatu:

$$N_1 = L_1^1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad (4.13)$$

$$N_2 = L_2^1 = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (4.14)$$

Macierze funkcji kształtu i ich pochodnych

Funkcje kształtu wyrażono we współrzędnych lokalnych, zaś budując macierz sztywności konieczne będzie posługiwanie się współrzędnymi globalnymi, potrzeba zatem wykonać kilka dodatkowych kroków, które pozwolą na przedstawienie macierzy \mathbf{B} w pożądanej postaci. Na rys. 4.1 pokazano współrzedną łukową dla pręta s oraz prostopadłą do niej n , a także oznaczono kąt α pomiędzy kierunkiem osi x i s . Dodatkowo zdefiniujemy przemieszczenie wzdłuż osi pręta (wzdłuż współrzędnej s) jako u_s , które jest równe:

$$u_s = u \cos(\alpha) + v \sin(\alpha). \quad (4.15)$$

Z kolei przemieszczenia u i v na długości elementu są uzależnione od przemieszczenia węzłów i funkcji kształtu:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N} \mathbf{u} \equiv [\mathbf{N}(\xi)] \mathbf{u}. \quad (4.16)$$

Przez wektor \mathbf{u} rozumiemy wektor przemieszczeń węzłowych, tak jak przedstawiono go powyżej. W analizowanym elemencie odkształcenia ograniczają się do podłużnego wydłużenia/skrócenia, które możemy wyrazić wprost:

$$\epsilon = \frac{du_s}{ds} = \frac{du_s}{d\xi} \frac{d\xi}{ds}. \quad (4.17)$$

Podstawiając równania (4.15) i (4.16) do (4.17) uzyskamy:

$$\epsilon = \frac{d\xi}{ds} \frac{d}{d\xi} \left(\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix} [\mathbf{N}(\xi)] \mathbf{u} \right). \quad (4.18)$$

Zarówno wektor $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix}$ jak i \mathbf{u} nie są funkcjami ξ , ponadto pamiętając o związku $\epsilon = \mathbf{B} \mathbf{u}$ możemy zapisać:

$$\mathbf{B} = \frac{d\xi}{ds} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix} \frac{d[\mathbf{N}(\xi)]}{d\xi}. \quad (4.19)$$

Wykorzystując rysunek 4.1 możemy zapisać relacje, które pozwolą ustalić wartość pochodnej $\frac{d\xi}{ds}$. Otóż zauważmy, że ds stanowi przeciwprostokątną w trójkącie, którego pozostałe boki to dx i dy zatem prowadzi to do równania:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix} \frac{d[\mathbf{N}(\xi)]}{d\xi}, \quad (4.20)$$

gdzie:

$$\cos(\alpha) = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}},$$

$$\sin(\alpha) = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

Punkty całkowania (punkty Gaussa)

Składowe stanu naprężenia obliczane są w elemencie w jednym punkcie Gaussa, który leży w środku elementu.

Element prętowy 3-węzłowy

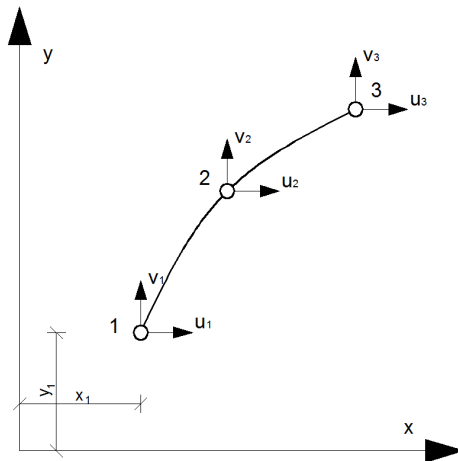
Omawiany element prętowy (rys. 4.3) został dodany do programu FENAP, by można było do elementu trójkątnego 6-węzłowego klasy C^0 dobrać element prętowy służący do modelowania prętów zbrojenia poprzecznego, który będzie zachowywał zgodność przemieszczeń z krawędziami przyległych elementów trójkątnych oraz będzie miał zgodne z nimi stopnie swobody w węzłach. Element ten jest trójwęzłowym, krzywoliniowym prętym o kwadratowych funkcjach kształtu, który ma sztywność jedynie wzdłuż swojej osi i przenosi jedynie naprężenia normalne w tym kierunku.

Funkcje kształtu

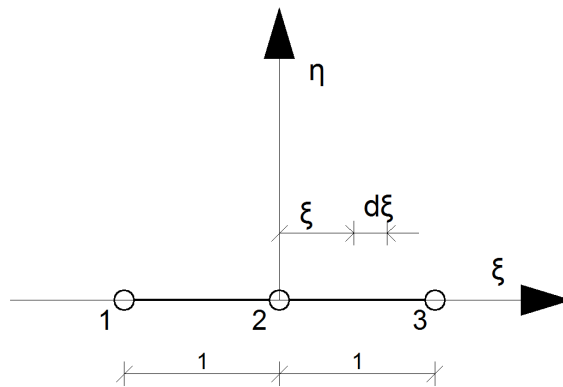
Zostały one zbudowane analogicznie jak to pokazano w poprzednim przypadku. Współrzędną lokalną ξ przedstawiono na rysunku 4.4.

$$N_1 = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi), \quad (4.21)$$

$$N_2 = (1 - \xi)(1 + \xi), \quad (4.22)$$



Rysunek 4.3: Element prętowy trójwęzłowy.



Rysunek 4.4: Element prętowy trójwęzłowy znormalizowany, współrzędne lokalne.

$$N_3 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi). \quad (4.23)$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu

Wyprowadzenie macierzy pochodnych można przeprowadzić analogicznie, z tą różnicą, że funkcje $\cos(\alpha)$ i $\sin(\alpha)$ są dodatkowo zależne od współrzędnej ξ . Ponadto, w porównaniu z prętem 2-węzłowym, inne są rozmiary macierzy i wektorów występujących w równaniach, oraz wprowadzone funkcje kształtu. Pamiętając o tym uzyskujemy:

$$\mathbf{B} = \frac{d\xi}{ds} \left(\frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix} [\mathbf{N}(\xi)] + \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix} \frac{d}{d\xi} [\mathbf{N}(\xi)] \right). \quad (4.24)$$

Tym razem konieczne jest bardziej ogólne zdefiniowanie funkcji kąta, przy okazji

wprowadźmy oznaczenia, które pozwolą w zwarty sposób przedstawić końcowe wyrażenia:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{d\xi}{ds} \frac{dx}{d\xi} = \frac{\frac{d}{d\xi}x(\xi)}{\sqrt{\left(\frac{d}{d\xi}x(\xi)\right)^2 + \left(\frac{d}{d\xi}y(\xi)\right)^2}} = \\ &= \frac{d\xi}{ds} \left(\sum \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} x_i \right) \equiv c,\end{aligned}\quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{d\xi}{ds} \frac{dy}{d\xi} = \frac{\frac{d}{d\xi}y(\xi)}{\sqrt{\left(\frac{d}{d\xi}x(\xi)\right)^2 + \left(\frac{d}{d\xi}y(\xi)\right)^2}} = \\ &= \frac{d\xi}{ds} \left(\sum \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} y_i \right) \equiv s.\end{aligned}\quad (4.26)$$

Zaś pochodne funkcji względem ξ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi} \cos(\alpha) &= \frac{d\xi}{ds} \frac{d^2x}{d\xi^2} = \frac{\frac{d}{d\xi}y(\xi) \left(-\frac{d}{d\xi}x(\xi) \frac{d^2y}{d\xi^2} + \frac{d^2x}{d\xi^2} \frac{d}{d\xi}y(\xi) \right)}{\left(\left(\frac{d}{d\xi}x(\xi) \right)^2 + \left(\frac{d}{d\xi}y(\xi) \right)^2 \right)^{3/2}} = \\ &= \frac{d\xi}{ds} \left(\sum \frac{dN_i^2(\xi)}{d\xi^2} x_i \right) \equiv c_{,\xi},\end{aligned}\quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi} \sin(\alpha) &= \frac{d\xi}{ds} \frac{d^2y}{d\xi^2} = -\frac{\frac{d}{d\xi}x(\xi) \left(-\frac{d}{d\xi}x(\xi) \frac{d^2y}{d\xi^2} + \frac{d^2x}{d\xi^2} \frac{d}{d\xi}y(\xi) \right)}{\left(\left(\frac{d}{d\xi}x(\xi) \right)^2 + \left(\frac{d}{d\xi}y(\xi) \right)^2 \right)^{3/2}} = \\ &= \frac{d\xi}{ds} \left(\sum \frac{dN_i^2(\xi)}{d\xi^2} y_i \right) \equiv s_{,\xi}.\end{aligned}\quad (4.28)$$

Przy weryfikacji elementu stwierdzono, że człon $\frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix} [\mathbf{N}(\xi)]$ szybko maleje przy zagęszczaniu siatki elementów i wpływ na wynik składników zawierających ten człon jest pomijalnie mały, więc ostatecznie zostały one usunięte pozwalając uprościć wyrazy macierzy \mathbf{B} do końcowej postaci:

$$\mathbf{B} = \frac{d\xi}{ds} \begin{bmatrix} c N_{1,\xi} & s N_{1,\xi} & c N_{2,\xi} & s N_{2,\xi} & c N_{3,\xi} & s N_{3,\xi} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Pochodną $\frac{d\xi}{ds}$ można wyznaczać wprost i przyjmuje ona wartość: $\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}}$.

Punkty całkowania

W elemencie zastosowana jest procedura całkowania numerycznego Gaussa z 3 punktami całkowania. Punkty te mają następujące współrzędne lokalne i wagi:

$$\xi_{G1} = 0,774596669241483; w_1 = \frac{5}{9}, \quad (4.30)$$

$$\xi_{G2} = 0; w_2 = \frac{8}{9}, \quad (4.31)$$

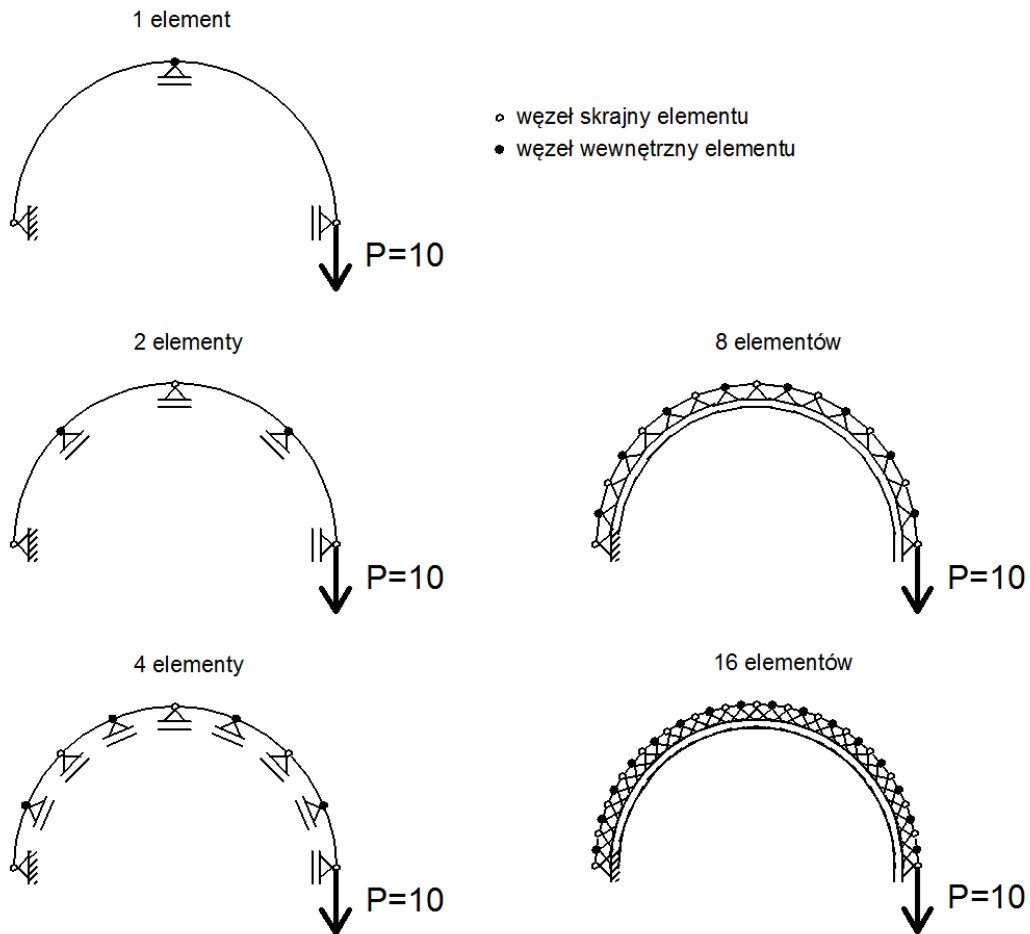
$$\xi_{G3} = -\xi_{G1}; w_3 = \frac{5}{9}. \quad (4.32)$$

Zbieżność elementu

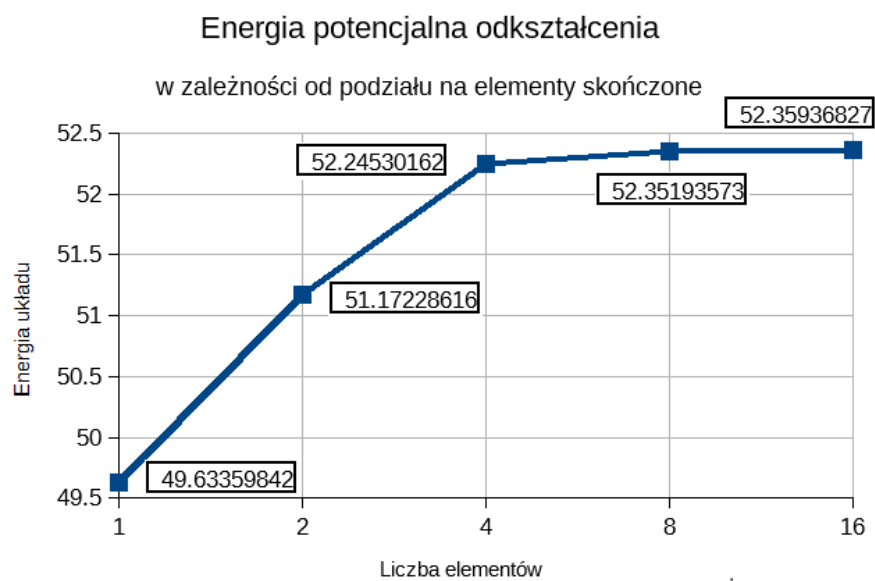
Dla omawianego elementu przeprowadzono testy mające sprawdzić poprawność implementacji oraz wykazać zbieżność i poprawność rozwiązania. Sprawdzono wartość całkowitej energii odkształcenia i jej zmiany wraz ze zmianą gęstości podziału na elementy, a także wartości sił normalnych w punktach całkowania numerycznego.

Zadanie testowe dotyczyło rozciągania łuku kołowego o długości kątowej π i promieniu $r = 1$, który był unieruchomiony na jednym końcu, podparty we wszystkich pozostałych węzłach przesuwnie, z zablokowanym kierunkiem promieniowym oraz obciążony na drugim końcu siłą styczną do łuku o wartości $P = 10$ (patrz rys.4.5). Stałe materiałowe, które wprowadzono do modelu to moduł Younga $E = 2$ oraz pole przekroju poprzecznego $A = 3$. Przyjęcie różnych wartości danych ma na celu uzyskanie bardziej przejrzystej interpretacji wyników testu. Do elementów nie przypisano masy, sił masowych, ani obciążeń innych niż wymienione. Na podstawie dokładnego rozwiązania analitycznego oczekiwaną wartością siły normalnej w każdym punkcie łuku jest $F = 10$, zaś oczekiwana wartość całkowitej energii odkształcenia wynosi $E_p = \int \frac{P^2}{EA^2} dV = \frac{P^2 \pi r}{EA} = \frac{50}{3} \pi \approx 52,3599$. Zastosowano podziały na 1, 2, 4, 8 i 16 elementów. Element z parabolicznymi funkcjami kształtu nie pozwala na uzyskanie ścisłego rozwiązania takiego zadania, więc spodziewano się poprawy dokładności rozwiązania wraz ze wzrostem liczby zastosowanych elementów.

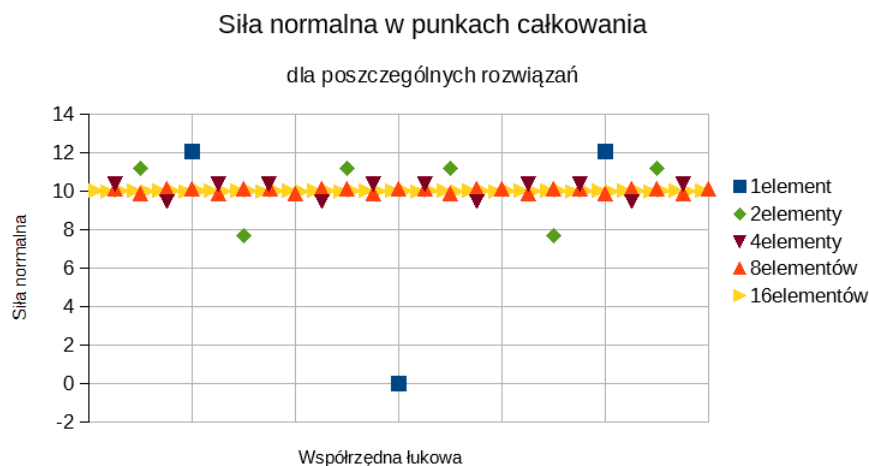
Uzyskano następujące wyniki:



Rysunek 4.5: Geometria zadania testowego. Przedstawiono 5 kolejnych podziałów na elementy.



Rysunek 4.6: Zbieżność energii odkształcenia wraz ze wzrostem gęstości podziału na elementy.



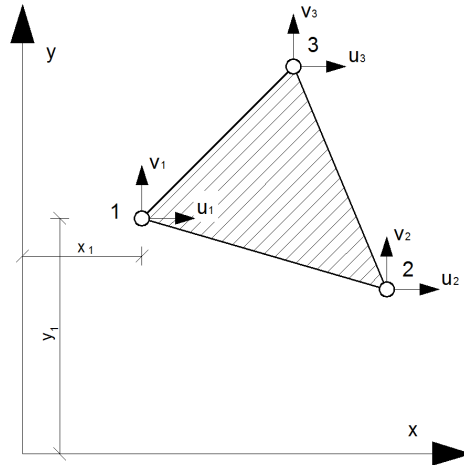
Rysunek 4.7: Wartości siły normalnej obliczone przy różnych podziałach na elementy.

Podsumowując można zauważyć, że element wykazuje zadowalającą zbieżność do rozwiązania dokładnego. Przy aproksymacji 1 elementem błąd energii wynosi $\Delta E_p \approx 5,2\%$, przy podziale na 2 elementy spada do około 2,3%, a przy podziale na 4 elementy już zauważalnie poniżej 1% do wartości niespełna 0,22%. Kolejno 8 elementów $\Delta E_p \approx 0,015\%$, zaś 16 $\Delta E_p \approx 10^{-5}$. Większe różnice niż w przypadku całkowitej energii odkształcenia widoczne są przy analizowaniu siły w punktach całkowania numerycznego. Można zauważyć oscylacje wartości wokół rozwiązania dokładnego, tzn. w centralnych punktach Gaussa w każdym z elementów wartości sił są zaniżone, zaś na zewnętrznych – zawyżone. Tu maksymalny błąd przy aproksymacji 1 elementem na jednym z punktów różnica osiągnęła 100%. Dalej szybko spadała by na kolejnych podziałach uzyskiwać maksymalnie odpowiednio 23% dla 2 elementów, 5,4% dla 4 elementów, 1,3% dla 8 elementów i 0,3% dla 16 elementów. Można zatem zauważyć, że wraz ze wzrostem liczby podziałów na elementy zarówno całkowita energia odkształcenia jak i wartości siły normalnej w punktach całkowania zbliżają się do wartości dokładnych. Wynik testu uznano za pozytywny i włączono prezentowany element do programu. Ponadto należy nadmienić, że w dalszej części prowadzonych badań elementy tego typu nie wykazywały anomalii przy rozwiązywaniu różnych zadań.

Element trójkątny 3-węzłowy

Wybór elementów trójkątnych do dyskretyzacji obszaru rdzenia betonowego jest podyktowany ich niewątpliwą wyższością nad elementami czworokątnymi. Po pierwsze siatka trójkątna pozwala łatwiej uzyskać pożądane kształty obszarów. Przy tym, podobnie jak elementy czworokątne, nie stwarza trudności dobranie dla poszczególnych grup elementów trójkątnych, elementów prętowych o zgodnych stopniach swobody w węzłach i zgodnych przemieszczeniach na brzegach. Najprostszym spośród rozważanych był zatem

element trójkątny klasy C^0 (rys.4.8). Element ten ma 3 węzły po 2 stopnie swobody każdy – odpowiadające przemieszczeniom w płaszczyźnie elementu – łącznie 6 stopni swobody oraz liniowe funkcje kształtu. Element gwarantuje ciągłość przemieszczeń na połączeniach z sąsiednimi.



Rysunek 4.8: Element trójkątny o 3 węzłach klasy C^0 .

Funkcje kształtu

W każdym z węzłów elementu są one określone

$$N_i = \frac{x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k) x + (x_k - x_j) y}{x_j y_k + x_i y_j + x_k y_i - x_j y_i - x_k y_j - x_i y_k}, \quad (4.33)$$

gdzie $i, j, k = 1, 2, 3$, zaś x_i, y_i – współrzędne i -tego węzła elementu.

Dodatkowo można zauważyć, że mianownik funkcji odpowiada podwojonemu polu powierzchni elementu trójkątnego A_Δ , zaś cały wyrażony w równaniu (4.33) stosunek odpowiada współrzędnej powierzchniowej – oznaczmy ją przez L_i – dowolnego punktu o współrzędnych (x, y) . Na rysunku (4.9) przedstawiono omawiany element w postaci znormalizowanej z naniesieniem dowolnego punktu P. Współrzędne powierzchniowe tego punktu wynoszą odpowiednio:

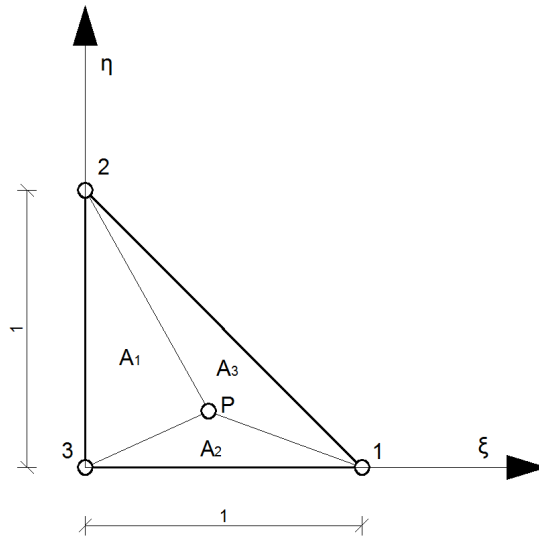
$$L_i = \frac{A_i}{A_\Delta}, \quad (4.34)$$

więc zachodzi związek:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (4.35)$$

Pozwala to powiązać współrzędne powierzchniowe ze współrzędnymi lokalnymi ξ i η , i łatwo wyrazić funkcje przy ich użyciu:

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi, \\ N_2 &= \eta, \\ N_3 &= 1 - \xi - \eta. \end{aligned} \quad (4.36)$$



Rysunek 4.9: Znormalizowany element trójkątny trzywęzłowy klasy C^0 z oznaczeniem trójkątów służących definicji współrzędnych powierzchniowych dowolnego punktu P.

Macierz pochodnych funkcji kształtu

Wyjściowo macierz pochodnych zdefiniowana jest następująco:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Po uproszczeniu i wyłączeniu wspólnego dzielnika macierz tę można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A_{\Delta}} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

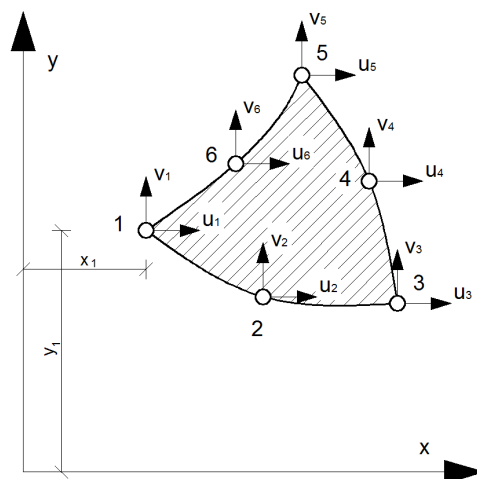
Fakt, że macierz \mathbf{B} nie zależy od współrzędnych dowolnego punktu wewnątrz elementu jest równoważny z tym, że odkształcenia obliczane w takim elemencie mają stałą wartość na całym jego obszarze.

Punkty całkowania (punkty Hammera)

Element ma jeden punkt całkowania numerycznego, w którym obliczane są składowe stanu naprężenia. Punkt ten leży w środku ciężkości elementu.

Element trójkątny 6-węzłowy

Omawiany element trójkątny klasy C^0 ma 6 węzłów po 2 stopnie swobody, łącznie 12 stopni swobody, oraz kwadratowe funkcje kształtu. Element umożliwia modelowanie obszarów o krawędziach krzywoliniowych. Podczas testów pozwalał uzyskać zbliżoną dokładność przy kilkukrotnie rzadszej siatce niż element 3-węzłowy. Najistotniejsze różnice są przy tym zauważalne na zaokrąglonych narożach strzemion, które nie wymagały poważniejszego zagęszczenia w przeciwieństwie do wcześniej opisanego elementu trójwęzłowego.



Rysunek 4.10: Element trójkątny 6-cio węzłowy.

Funkcje kształtu

Określone we współrzędnych kartezjańskich przyjmują postać jak podano poniżej. W węzłach narożnych:

$$N_i = \left(2 \frac{x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k) x + (x_k - x_j) y}{x_j y_k + x_i y_j + x_k y_i - x_j y_i - x_k y_j - x_i y_k} - 1 \right) \cdot \frac{x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k) x + (x_k - x_j) y}{x_j y_k + x_i y_j + x_k y_i - x_j y_i - x_k y_j - x_i y_k}, \quad (4.39)$$

w węzłach na środkach boków:

$$N_l = 4 \frac{[x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k) x + (x_k - x_j) y] [x_i y_j - x_j y_i + (y_i - y_j) x + (x_j - x_i) y]}{(x_j y_k + x_i y_j + x_k y_i - x_j y_i - x_k y_j - x_i y_k)^2}, \quad (4.40)$$

gdzie:

$i, j, k = 1, 3, 5$ – kolejne węzły i funkcje kształtu,

$l, m, n = 2, 4, 6$ – kolejne węzły i funkcje kształtu,

x_i, y_i – współrzędne i -tego węzła elementu.

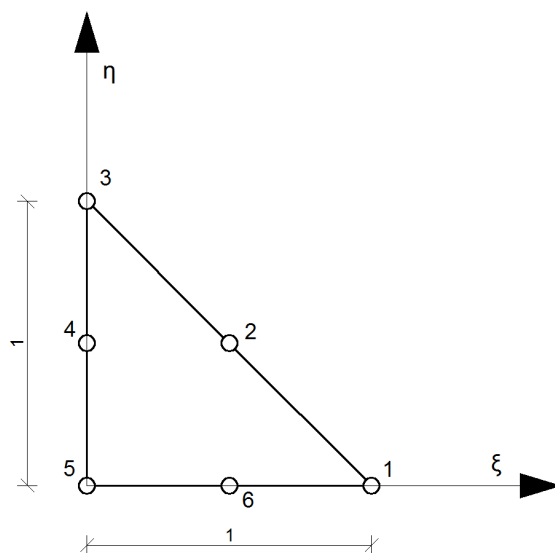
Przy zastosowaniu takich samych oznaczeń węzłów funkcje kształtu określone we współrzędnych powierzchniowych przyjmują poniższe postacie:

węzły narożne:

$$N_i = L_i (2L_i - 1), \quad (4.41)$$

węzły na środkach boków:

$$N_l = 4L_{l-1} L_{l+1}. \quad (4.42)$$



Rysunek 4.11: Znormalizowany element trójkątny sześciowęzłowy klasy C^0 .

Po znormalizowaniu elementu (rys. (4.11)) funkcje kształtu we współrzędnych lokalnych można wyrazić następująco:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \xi(2\xi - 1), \\
N_2 &= 4\xi\eta, \\
N_3 &= \eta(2\eta - 1), \\
N_4 &= 4\eta(1 - \xi - \eta), \\
N_5 &= (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), \\
N_6 &= 4\xi(1 - \xi - \eta).
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu

Macierz \mathbf{B} jest zdefiniowana następująco:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix}. \tag{4.44}$$

Punkty całkowania (punkty Hammera)

W elementach tego typu zastosowano 3 punkty całkowania numerycznego. Punkty te zlokalizowane są w $\frac{1}{3}$ długości środkowych trójkąta, bliżej wierzchołka. Każdy ma przypisaną jednakową wagę równą $w_i = \frac{1}{3}$.

4.5. Dane materiałowe

Moduł Younga i stała Poissona

Wszystkie z wykorzystanych materiałów opisane są modelem liniowo-sprężystym –idealnie–plastycznym i w początkowej fazie obciążania zachowują się zgodnie z prawem Hooke’a. W przypadku prętowych elementów stalowych wymagały one określenia modułu Younga E_s zaś dla continuum modelującego beton modułu sprężystości E_c i stałej Poissona ν_c . Należy zauważyć, że przeprowadzone wstępnie symulacje oraz doświadczenia innych badaczy wskazują na drugorzędne znaczenie powyższych parametrów dla końcowych wyników. Wpływ parametrów betonu i stali opisano krótko w dodatku A.4.

Moduł sprężystości betonu zależy od zastosowanego kruszywa oraz matrycy cementowej, niemniej w pewnym uogólnieniu można stwierdzić, iż jest związany z jego wytrzymałością. W pracy wykorzystano związki między wytrzymałością na ściskanie – jako parametrem głównym parametrem określającym materiał – a modułem Younga.

American Concrete Institute proponuje następujące związki [1] :

$$E_c = \rho_c^{1.50} \times 0,043 \sqrt{f_c}, \quad (4.45)$$

gdzie ρ_c jest gęstością wyrażoną w kg/m^3 zaś f_c wytrzymałością betonu na ściskanie wyrażoną w MPa. Uzyskana jest w ten sposób wartość liczbową modułu sprężystości w MPa. Alternatywnie:

$$E_c = 4700 \sqrt{f_c}, \quad (4.46)$$

dla betonów na kruszywie zwykłym, czyli w sytuacji gdy wartość ρ_c mieści się w przedziale od 1440 do 2560 kg/m^3 . Obowiązująca w większości krajów europejskich norma [33] zaleca sposób określania przybliżonej wartości modułu Younga według następującej reguły:

$$E_c = 22 (0,1 f_c)^{0.3}, \quad (4.47)$$

gdzie wytrzymałość na ściskanie f_c jest wyrażona w MPa, a uzyskany wynik w GPa, przy czym zastrzega, że wartości tak obliczone są właściwe dla betonów na kruszywie kwarcytowym. Dodatkowo powyższa norma zaleca wprowadzenie korekt w przypadku użycia innego kruszywa. Współczynnik korekcyjny przyjmuje następujące wartości:

1. dla lekkich betonów kruszywowych wynik należy pomnożyć przez współczynnik $\eta_E = (\rho_c/2200)^2$, gdzie gęstość ρ_c jest wyrażona w kg/m^3 , sam współczynnik jest bezwymiarowy,
2. dla kruszyw wapiennych wartość obliczoną według (4.47) pomniejszyć o 10 %,
3. dla kruszyw piaskowych wartość obliczoną według (4.47) pomniejszyć o 30 %,
4. dla kruszyw bazaltowych wartość obliczoną według (4.47) powiększyć o 20 %.

Różnice wyników pomiędzy obiema metodami dla betonów zwykłych nie przekraczają kilku procent. Przy przygotowaniu dalej prezentowanych przykładów obliczeniowych najczęściej stosowano drugą z wymienionych formuł czyli (4.47).

Stała Poissona ν_c dla betonu w modelu obliczeniowym została ujęta jako stała materiałowa o niezmiennym wartości w całym zakresie sprężystym. Opierając się na książce Brooksa z 2014 [17] można stwierdzić, że w zakresie wyężenia materiału do około 40 % nośności założenie to jest niemal ściśle spełnione, a jej wartość mieści się w przedziale $\nu_c = 0,15 - 0,20$. Dalej, wraz z obciążaniem osiowym próbek, dochodzi do propagacji rys podłużnych i obserwacji odkształceń poprzecznych większych niż we wcześniejszym zakresie, co należy interpretować jako wzrost wartości stałej Poissona. Tuż przed zniszczeniem, gdy materiał traci częściowo ciągłość, może przyjmować wartości zbliżone do 0,5, a nawet pozornie przekraczać tę wartość. Z kolei norma *Badanie betonu. Oznaczanie prędkości fali ultradźwiękowej* [12] podaje wartości stałej ν_c w zakresie od 0,18 do 0,36, uzależniając je głównie od zastosowanego kruszywa. Zaś w publikacji *Pulse velocity through concrete* [9] wskazano na wartość $\nu_c = 0,19$ dla stwardniałego betonu. Wspomniana wcześniej norma

[33] zaleca przyjmować stałą wartość $\nu_c = 0,2$ i tę wartość przyjmowano w przykładach obliczeniowych.

Części składowe zbrojenia poprzecznego modelowane są przez elementy prętowe, a nie jak rdzeń betonowy przez continuum, toteż wystarczające jest określenie dla nich (poza granicą plastyczności) wartości modułu Younga E_s . *Metal Handbook* [8] podaje wartości stałych materiałowych dla różnych gatunków stali, stosując podział i nazewnictwo według standardów amerykańskich. Wartości modułu Younga, w zależności od stopu, przyjmują wartości $E_s = 190 - 210$ GPa. Norma [33] nie precyzuje przedziału wartości modułu Younga, jakie musi spełniać stal zbrojeniowa by była dopuszczona do stosowania, więc w deklaracjach zgodności i aprobaty technicznych stali zbrojeniowych dostępnych na polskim rynku zwykle ta wielkość nie jest określana. Jednocześnie zalecana przez nią do obliczeń wartość wynosi $E_s = 200$ GPa dla zbrojenia niesprężonego, $E_s = 205$ GPa dla strun sprężających, a $E_s = 195$ GPa dla splotów kabli sprężających.

Kąt tarcia wewnętrzznego i spójność

W pracy do opisu warunku plastyczności betonu ostatecznie wykorzystywane są dwa modele dwuparametrowe: Druckera–Pragera i Mohra–Coulomba z niestowarzyszonym prawem płynięcia oraz model pięcioparametrowy Willama–Warnkego ze stowarzyszonym prawem płynięcia. Dostępny materiał badawczy, na podstawie którego przeprowadzono weryfikację poprawności działania zaprezentowanego modelu, dostarczał niedostateczną ilość informacji, by jednoznacznie określić powierzchnię plastyczną dla poszczególnych modeli. Spowodowane jest to faktem, iż w przeważającej liczbie przypadków podano jeden wiodący parametr badanych betonów (wytrzymałość na jednoosiowe ściskanie), zaś wyniki dla próbek skrępowanych zbrojeniem poprzecznym w części prezentowały pełen przebieg relacji naprężenie–odkształcenie [94, 111, 128, 127], w części – wyniki siły osiowej powodującej zniszczenie badanej próbki jak np. [97, 98]. W konsekwencji konieczne było przeprowadzenie dodatkowego badania, które pozwoliłoby powiązać brakujące dane materiałowe z dostępnymi. Dla modeli Druckera–Pragera i Mohra–Coulomba problem ten można rozwiązać przyjmując stałą wartość dla jednej ze stałych materiałowych. Wykonując przekształcenia warunku sformułowanego przez Coulomba w 1776 r. w postaci $|\tau| = c - \sigma \tan(\phi)$ otrzymamy zależności pomiędzy jednoosiową wytrzymałością na ściskanie i rozciąganie oraz kohezją i kątem tarcia wewnętrzznego:

$$\sigma_R = \frac{2c \cos(\phi)}{1 + \sin(\phi)}, \quad (4.48)$$

$$\sigma_C = \frac{2c \cos(\phi)}{1 - \sin(\phi)}. \quad (4.49)$$

Wówczas rozwiązaniem może być ustalenie stałej wartości jednej spośród nie-
wiadomych bądź wprowadzenie dodatkowego równania (prawa) wiążącego dwie z nie-
wiadomych. Ostatecznie, po wykonaniu licznych prób dla różnych wartości kąta tarcia
wewnętrznego i spójności, wybrano ustalenie stałej wartości kąta tarcia wewnętrznego
 $\phi = 37^\circ$ i skorelowanej z nią wartości kohezji wg równania (4.49). Przed dokonaniem
takiego wyboru rozważono następujące możliwości:

1. wprowadzenie zależności pomiędzy σ_R i σ_C na podstawie np. [51, 33, 38] lub
innych publikacji;
2. ustalenie wartości kąta tarcia wewnętrznego ϕ ;
3. powiązanie wartości kohezji z innymi parametrami.

Ostatnia z możliwości zakłada, że można wyrazić spójność poprzez kombinację
innych parametrów. Arslan w swoich pracach [4, 5] proponuje ustalenie stałej wartości
kohezji w następujących postaciach:

$$c = 0,23 \ln(E_0 D_{\text{MAX}}^2), \quad (4.50)$$

lub:

$$c = 0,23 \ln \left(\frac{\sigma_R^2 D_{\text{MAX}}^3}{G_{\text{Kirchhoff}}} \right), \quad (4.51)$$

gdzie:

E_0 – początkowy moduł odkształcalności podłużnej (moduł Younga),

D_{MAX} – maksymalny średnica ziaren kruszywa,

$G_{\text{Kirchhoff}}$ – moduł odkształcalności poprzecznej (moduł Kirchhoffa),

σ_R – wytrzymałość betonu na rozciąganie.

Wykorzystanie tego podejścia w pracy wymagałoby wprowadzenia dodatkowego
parametru w postaci maksymalnego wymiaru kruszywa, który to parametr nie zawsze
podawany jest w publikacjach wyników badań. Pozostałe dwa parametry (moduły Younga
i Kirchhoffa) już wcześniej zostały wprowadzone do modelu (dokładnie moduł Younga
 E i stała Poissona ν). Niemniej w sytuacji, gdy te stałe nie są powiązane z kohezją,
po serii prób numerycznych zauważono, że ich wpływ na nośność betonowego przekroju
skrepowanego zbrojeniem nie jest decydujący. Stwierdzenie tego faktu było istotne w celu
zweryfikowania przyjętego uprzednio założenia, że wartości E i ν mogą być wyrażone
przez stałe wartości, do tego wprowadzone ze znanych zależności.

Na podstawie wyników badań, zaprezentowanych w pracy Pula i innych z 2017
[89], można z kolei poczynić spostrzeżenie, że wartość kohezji odpowiada 20% – 27%
wartości wytrzymałości na ściskanie.

Inny przykład obliczenia wartości kohezji znajdujemy w artykule Lubliner i in-
nych z 1989 [62]. Praca przedstawia kompleksowy model zachowania betonu wraz z opisem
powierzchni zniszczenia i prawem płynięcia. W tym przypadku spójność została potrak-

towana jako funkcja zależna od stanu naprężenia. Dodatkowo przedstawiony w powyższej pracy model zawiera powiązany z nią mechanizm zniszczenia (degradacji). Podobne ujęcie zaprezentowane jest w także w pracy Erzara i Forquina z 2014 [31], gdzie zmiana kohezji jest związana ze wzrostem odkształceń plastycznych i postępującym zniszczeniem materiału. Takie rozwiązanie nie zostało przyjęte, gdyż wymagałoby istotnego przebudowania zaprezentowanego wcześniej modelu obliczeniowego.

Wg artykułów Mirmirana z 2000 czy Sadeghiana z 2008 [68, 104], a także bazując na pierwowzorze zawartym w pracy Rochette'a i Labossie're'a [100], zarówno kąt tarcia wewnętrznego jak i kohezję można opisać i obliczać na podstawie wytrzymałości betonu na ściskanie wg wzorów:

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{3}{1 + 0,4\sigma_C/\sqrt{3}} \right), \quad (4.52)$$

$$c = \left(\sigma_C - 5\sqrt{3} \right) \frac{3 - \sin(\phi)}{6 \cos(\phi)}. \quad (4.53)$$

Wiele spośród dalej cytowanych pozycji sugeruje, że dla betonów kąt tarcia wewnętrznego może być parametrem przyjmującym stałą wartość. Spotykane w literaturze propozycje obejmują szeroki przedział proponowanych wartości w zakresie od $\phi = 20^\circ$ za Ferhoune i Zeghiche [35] do nawet $\phi = 55^\circ$. De Borst [120] zaleca przyjmowanie dla skał, betonów i gruntów wartości w zakresie $\phi = 15^\circ - 45^\circ$ proponując w przypadku betonów ograniczyć się do zakresu $\phi = 30^\circ - 35^\circ$. Oñate i inni [80] rozszerzają ten zakres do $\phi = 25^\circ - 35^\circ$, ale jednocześnie zauważają, że w przypadku stosowania niemodyfikowanego kryterium Mohra–Coulomba bez dylatacji (tzn. $\psi = 0^\circ$) wskazane jest przyjmowanie wartości wyższych sięgających nawet $\phi \approx 60^\circ$. Często stosowaną wartością kąta jest $\phi = 37^\circ$ [7, 96, 117, 118]. Wartości zbliżone pokazują także współczesne badania betonów zawarte w pracy Pula i innych z 2017 [89], gdzie wyniki oscylują w zakresie $\phi = 29,8^\circ - 41,7^\circ$. Pojawiają się też postulaty by przyjmować wartości wyższe, sięgające nawet $\phi = 55^\circ$ jak podaje Fujita i inni [38]. Autorzy powyższego artykułu zauważają dodatkowo, że stosunek wytrzymałości na rozciąganie do wytrzymałości na ściskanie jest stały i wynosi $\sigma_R/\sigma_C = 0,05$. W celu skalibrowania zaprezentowanego wcześniej w pracy modelu przeprowadzono serie obliczeń próbnych porównując uzyskane wyniki z dostępnymi w literaturze wynikami badań.

Kąt dylatacji

Stosując stowarzyszone prawo płynięcia kąt tarcia wewnętrznego ϕ determinuje wartość kąta dylatacji $\psi = \phi$ i w części przygotowanych przykładów obliczeniowych przyjęto takie rozwiązanie. Stowarzyszone prawo płynięcia zastosowano m.in. w pracy Lubliner z 1989 [62]. Ponadto w wykorzystanych do dalszych analiz modelach Drucker–Pragera i Coulomba–Mohra w głównych obliczeniach wykorzystano niestowarzyszone prawo płynięcia przyjmując funkcję potencjału plastycznego $G(\psi)$. Vermeer i de Borst

[120] dla betonu oraz skał litych przytaczają wartości kąta dylatacji $\psi = 0^\circ - 20^\circ$, ale dowodzą także, iż przyjęcie wartości niższych od zera jest teoretycznie możliwe i dopuszczalne, gdy materiał traci sztywność po uplastycznieniu i staje się niestabilny (jak luźne piaski), zaś przyjmowanie wartości wyższych od kąta ϕ , gdy po uplastycznieniu następuje wzmocnienie. Kolejno Oñate i inni [80] podają, że dla betonów typową i odpowiednią wartością jest $\psi = 15^\circ$. Z kolei Gajewski i Grabowski [40] przyjmują $\psi = 38^\circ$.

Parametry modelu Willama–Warnkego

Wykorzystywany w niniejszej pracy opis betonu jest bezpośrednią implementacją rozwiązań zaproponowanych przez autorów [124]. W załączniku do swojego artykułu zestawiają proponowane badania, które są wystarczające do wyznaczenia kształtu powierzchni plastycznej – 3 punkty zniszczenia przy kącie Lodego $\theta = 0^\circ$ i 3 przy kącie Lodego $\theta = 60^\circ$. Każdy z tych dwóch trzypunktowych zestawów jednoznacznie opisuje skrajne parabole będące śladem powierzchni plastycznej na płaszczyznach zawierających oś hydrostatyczną i ustawionych pod odpowiednim kątem θ . Oczywiście obydwie parabole muszą spotkać się we wspólnym wierzchołku stąd wystarczające jest przeprowadzenie wyłącznie pięciu testów. Wartości parametrów $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ ustalone są względem normy σ_C – wytrzymałości betonu na ściskanie, która służy przeskalowaniu całej powierzchni z zachowaniem podobieństwa kształtu. Wykorzystując dodatkowo wytrzymałość na trójosiowe równomierne rozciąganie – σ_R , oraz dwuosiowe równomierne ściskanie – σ_B konieczne jest wykonanie jeszcze dwóch testów, które doprowadzą do zniszczenia na południku „rozciągany” ($\theta = 0^\circ$, określany jest stan naprężenia ξ_1, ρ_1) i południku „ściskany” ($\theta = 60^\circ$, określany jest stan naprężenia ξ_2, ρ_2). Wówczas wartości szukanych stałych da się wyrazić następująco:

$$a_0 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_B}{\sigma_C} a_1 - \frac{4}{9} \left(\frac{\sigma_B}{\sigma_C} \right)^2 a_2 + \sqrt{\frac{2}{15}} \frac{\sigma_B}{\sigma_C}, \quad (4.54)$$

$$a_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{2\sigma_B - \sigma_R}{\sigma_C} \right) a_2 + \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\sigma_R - \sigma_B}{2\sigma_B + \sigma_R}, \quad (4.55)$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{\frac{6}{5}} \xi_1 \left(\frac{\sigma_R - \sigma_B}{\sigma_C} \right) - \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\sigma_R \sigma_B}{\sigma_C^2} + \rho_1 \left(\frac{2\sigma_B + \sigma_R}{\sigma_C} \right)}{\left(\frac{2\sigma_B + \sigma_R}{\sigma_C} \right) \left(\xi_1^2 - \frac{2}{3} \frac{\sigma_B}{\sigma_C} \xi_1 + \frac{1}{3} \frac{\sigma_R}{\sigma_C} \xi_1 - \frac{2}{9} \frac{\sigma_R \sigma_B}{\sigma_C^2} \right)}, \quad (4.56)$$

$$b_0 = -\xi_0 b_1 - \xi_0^2 b_2, \quad (4.57)$$

$$b_1 = \left(\xi_2 + \frac{1}{3} \right) b_2 + \frac{\sqrt{\frac{6}{5}} - 3\rho_2}{3\xi_2 - 1}, \quad (4.58)$$

$$b_2 = \frac{\rho_2 \left(\xi_0 + \frac{1}{3} \right) - \sqrt{\frac{2}{15}} (\xi_0 + \xi_2)}{\left(\xi_0 + \xi_2 \right) \left(\xi_2 - \frac{1}{3} \right) \left(\xi_0 + \frac{1}{3} \right)}. \quad (4.59)$$

W powyższych wzorach przez ξ_0 rozumiana jest współrzędna hydrostatyczna wierzchołka obydwu parabol, którą można obliczyć znając trzy pierwsze parametry:

$$\xi_0 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}. \quad (4.60)$$

Wartości przyjętych tu wielkości ρ i ξ zależą od wartości niezmienników tensora stanu naprężenia według poniższych reguł:

$$\xi = \frac{\frac{1}{3}I_1}{\sigma_C}, \quad (4.61)$$

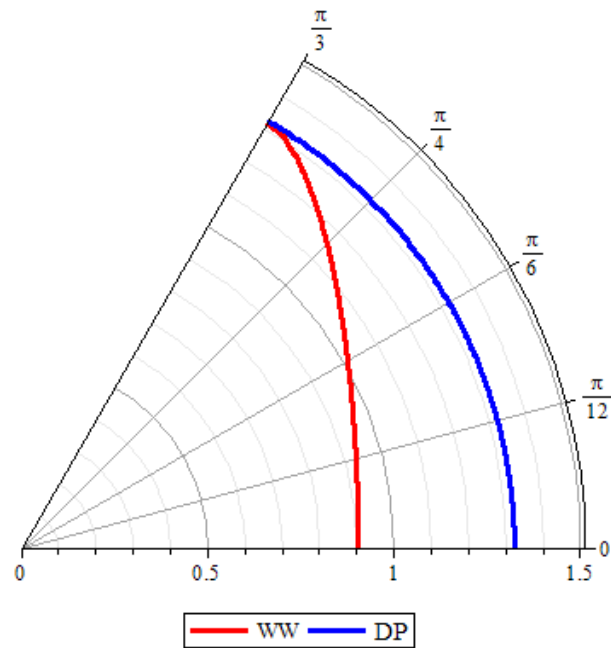
$$\rho = \frac{\sqrt{\frac{2}{5}J_2}}{\sigma_C}. \quad (4.62)$$

Przyjmowane w dalszych obliczeniach wartości parametrów $a_0 = 0,08055545$; $a_1 = -0,51426114$; $a_2 = -0,02805677$; $b_0 = 0,11979267$; $b_1 = -0,76005290$; ustalono bezpośrednio z artykułu [124] prezentującego model. Willam i Warnke opierali się na badaniach Launay'a i Gachona z 1972 roku, w którym opisano odkształcenia i wytrzymałość betonów w różnych wariantach trójosiowego ściskania. Przyjęte wartości odpowiadają sytuacji gdzie wytrzymałość $\sigma_B = 1,8\sigma_C$, $\sigma_R = 0,15\sigma_C$, a dodatkowe punkty zniszczenia ustalono przy stanie naprężenia $\xi_1 = \xi_2 = 3,67$, $\rho_1 = 1,59$, $\rho_2 = 1,94$. Na rys. 4.12 przedstawiono ślad powierzchni plastycznej na płaszczyźnie dewiatorowej wyznaczonej dla naprężeń głównych $\sigma_1 = \sigma_2 = -5$ MPa, $\sigma_3 = -35$ MPa, w zakresie kąta Lodego $\theta = 0^\circ - 60^\circ$. Współrzędne równoleżnikowe wyrażone są w skali wg wzoru (4.62). Dla porównania umieszczono ślad stosowanego w pracy modelu Druckera–Pragera opisanego na ostrosłupie Mohra–Coulomba.

4.6. Opis zastosowanego oprogramowania

Matematyczny opis wykorzystanych modeli znajduje się we wcześniejszej części pracy, w tej części przedstawiony zostanie techniczny sposób ich realizacji. Do wielu procesów wykorzystano oprogramowanie komputerowe, a główne symulacje wykonano na serwerze Katedry Mechaniki Materiałów Politechniki Łódzkiej pracującym w środowisku GNU/Linux. Najważniejsze programy, z których korzystał autor to:

- FENAP – Finite Element Nonlinear Analysis Program autorstwa prof. Z. Więckowskiego – posłużył do wykonania symulacji numerycznych metodą elementów skończonych ściskania skrępowanych przekrojów betonowych,
- Maple w wersji 12. dystrybuowany i rozwijany przez Maplesoft – przy jego użyciu zostały wykonane obliczenia symboliczne,
- LibreOffice Calc dystrybuowany przez The Document Foundation – arkusz kal-

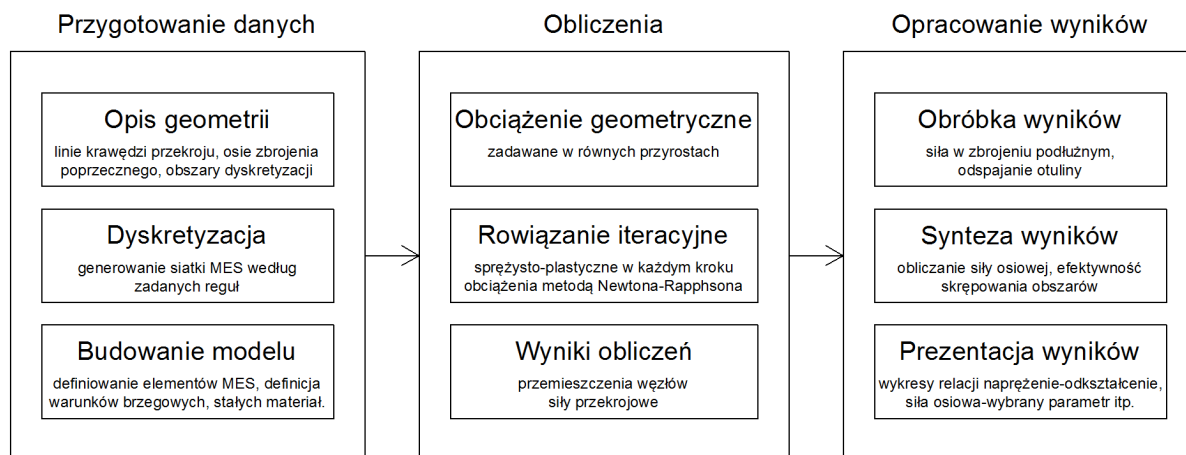


Rysunek 4.12: Ślad powierzchni plastycznej Willama-Warnkego i Druckera-Pragera na płaszczyźnie dewiatorowej.

kulacyjny wykorzystywany głównie do końcowej obróbki wyników uzyskanych przy użyciu programu FENAP.

Ponadto do przygotowania plików wejściowych do programu FENAP używano edytorów tekstu oraz skryptów, które umożliwiły przynajmniej częściową automatyzację ich tworzenia przez generowanie siatek obliczeniowych, definiowanie elementów czy wprowadzanie warunków brzegowych.

Przebieg całego procesu dla wszystkich dalej prezentowanych serii obliczeń był taki sam. W pierwszej kolejności przygotowywano plik opisujący geometrię rozwiązywanego zadania. Zawierał on opis krawędzi przekroju, inne linie, na których znajdować się miały osie zbrojenia poprzecznego (strzemiona, zwoje), a także podział na obszary. Ten ostatni zabieg pozwala prosto wydzielić przy końcowej obróbce wyników elementy skończone wewnątrz poszczególnych części przekroju i na tej podstawie dokonać dodatkowych analiz i operacji (np. obliczyć średnie naprężenie w poszczególnych sekcjach). Na tym etapie wprowadzano możliwe redukcje obszaru obliczeniowego przez wykorzystanie osi symetrii. Zarys przekroju w docelowych modelach obejmował wyłącznie rdzeń. Warto nadmienić, że w początkowej fazie obliczeń wykonywane były także na siatkach obliczeniowych wraz z otuliną, ale podczas analizy wyników konsekwentnie obserwowano osiągnięcie dopuszczalnych naprężeń rozciągających w płaszczyźnie przekroju na granicy rdzenia i otuliny. Odpowiada to fizycznemu zjawisku odspajania otuliny przy wyższych wartościach odkształceń podłużnych słupa.



Rysunek 4.13: Algorytm ogólny przygotowania modeli.

W dalszej kolejności, na podstawie tak przygotowanego pliku generowano siatkę obliczeniową. Docelowo w obliczeniach stosowano elementy z kwadratowymi funkcjami kształtu, a określenie wymaganej gęstości podziałów osiągnięto eksperymentalnie, wykonując początkowo obliczenia dla różnej wielkości elementów i porównując dokładność rozwiązania z najlepszym z uzyskanych. Ostatecznie standardem w przedstawionych obliczeniach było stosowanie siatek, w których maksymalny wymiar elementu wynosił około 10 % wymiaru dyskretyzowanego pola. W obszarach możliwych koncentracji bądź zmiany kierunku naprężeń głównych wymiar elementów stopniowo zmniejszono o około 1 rząd wielkości. Trzeci etap polegał na wprowadzeniu do przygotowanej siatki elementów skończonych: trójkątnych do modelowania obszaru betonowego, prętowych krzywoliniowych w miejscu prowadzenia prętów zbrojenia poprzecznego. Dodatkowo na tym etapie plik startowy uzupełniany był o warunki brzegowe, dane materiałowe oraz informacje o obciążeniu – zakres definiowanych odkształceń podłużnych oraz liczbę kroków, w których obciążenie ma być przykładane.

Po przygotowaniu danych następowała zasadnicza symulacja numeryczna bazująca na opisanym modelu obliczeniowym, wykonywana programem FENAP. Wykorzystując przemieszczeniowe sformułowanie metody elementów skończonych w płaskim stanie odkształcenia otrzymywano pola naprężeń i przemieszczeń w każdym kroku obciążenia. Program umożliwia bezpośredni wgląd w komplet wyników tzn. wynikowy plik tekstowy zawiera wartości wszystkich stopni swobody i wartości sił wewnętrznych obliczanych we wszystkich punktach całkowania numerycznego w każdym kroku obciążenia. Ponadto oferuje standardową prezentację wyników w formie graficznej. Za wykorzystaniem tego oprogramowania przemawiała jego dostępność oraz możliwość dostosowania do potrzeb rozwiązywanego zadania.

Ostatni krok każdej serii obliczeń obejmował ich końcową obróbkę. Wykorzystywano do niej skrypty pozwalające na selektywny wybór wyników spośród dostępnych, a następnie ich import do arkusza kalkulacyjnego. W ten sposób przygotowano wyniki końcowe służące stworzeniu następujących rezultatów: wykresy siły osiowej (lub znormalizowanej siły osiowej) zależne od odkształcenia podłużnego słupa, wykresy obrazujące wpływ różnych czynników (np. stopnia zbrojenia poprzecznego, stosunku długości boków przekroju prostokątnego itd.) na efektywność skrępowania, rysunki średnich wartości naprężeń normalnych w poszczególnych polach na przekrojach skrępowanych wieloma zwojami/strzemionami. Na tym etapie dodawano siłę w zbrojeniu podłużnym (jeżeli taka była konieczna w analizowanym przykładzie). Schemat algorytmu postępowania przy rozwiązywaniu zadań rachunkowych zamieszczono na rys. (4.13).

5. Przykłady obliczeń

5.1. Serie porównawcze z wynikami badań tajwańskich Yin i inni [128, 127]

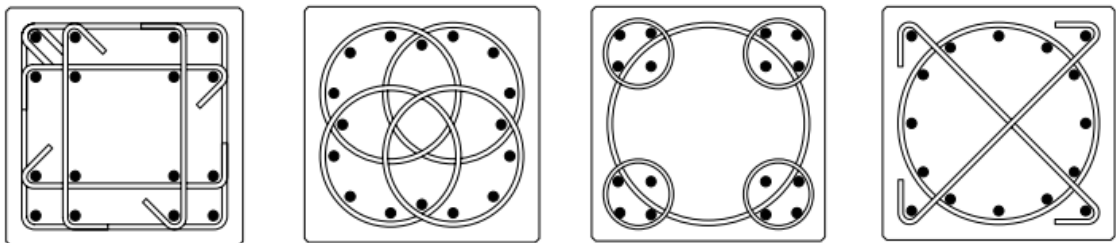
O powyższych badaniach wspomniano wyżej przy okazji przeglądu literatury, gdzie podano podstawowe informacje o zakresie i wynikach doświadczeń. Na podstawie przedstawionych w pracach [128, 127] danych próbek doświadczalnych przygotowano modele numeryczne. W obrębie danej serii próbek stosowano te same siatki obliczeniowe, w docelowych symulacjach, których wyniki poniżej są prezentowane stosowano siatki elementów 6-węzłowych trójkątnych (rys. 5.2), elementy uzwojenia modelowano 3-węzłowymi zakrzywionymi elementami prętowymi. Przekroje poprzeczne uzwojenia zostały dobrane tak by odpowiadały zbrojeniu na jednostkowej długości słupa (odpowiadającą wielkości 1m). Do opisu stali zastosowano model materiałowy Hubera–von Misesa, zaś rdzeń betonowy przedstawiono stosując 3 różne podejścia, które różniły się zastosowanym kryterium plastyczności. Dla każdej zbadanej próbki docelowo przygotowano 3 modele: w pierwszym elemencie rdzenia przypisano warunek wytrzymałościowy Mohra–Coulomba z niestowarzyszonym prawem płynięcia, przyjmując stałą wartość kąta tarcia wewnętrznego $\phi = 37^\circ$, stałą wartość kąta dylatacji $\psi = 30^\circ$ oraz zależną od wartości wytrzymałości betonu wartość kohezji $c = 8,576 \text{ MPa}$ dla betonu o wytrzymałości $f_c = 34,4 \text{ MPa}$ oraz $c = 17,126 \text{ MPa}$ odpowiednio dla $f_c = 68,7 \text{ MPa}$. W drugim modelu różnica polegała na zastosowaniu dla betonu kryterium Druckera–Pragera z wykorzystaniem stożka opisanego na ostrosłupie Mohra–Coulomba, także z niestowarzyszonym prawem płynięcia, przyjmując takie same dane materiałowe. Trzeci model wykorzystywał pięcioparametrowy warunek plastyczności Wilama–Warnkego ze stowarzyszonym prawem płynięcia. Parametry opisane we wzorach (3.56), (3.57) przyjęto o następujących wartościach: $a_0 = 0,08055545$; $a_1 = -0,51426114$; $a_2 = -0,02805677$; $b_0 = 0,11979267$; $b_1 = -0,76005290$; $b_2 = -0,07195738$; zaś wartość σ_c przyjmowała odpowiednie wartości wytrzymałości betonu na ściskanie określone tu przez f_c . Uzwojenie modelowano tak samo we wszystkich trzech przypadkach.

Zaprezentowane porównanie odnosi się do drugiej części cytowanych badań [128], która obejmowała 4 serie od 2 do 6 próbek dla jednego sposobu kształtowania zbrojenia. Wymiary geometryczne i sposób obciążania próbek we wszystkich seriach były jednakowe. Serie różnił sposób kształtowania zbrojenia poprzecznego (rys. 5.1). Pierwsza, oznaczona jako T (ang. *tie* – wiązanie w znaczeniu strzemię), obejmowała 2 próbki zbrojone strzemio-

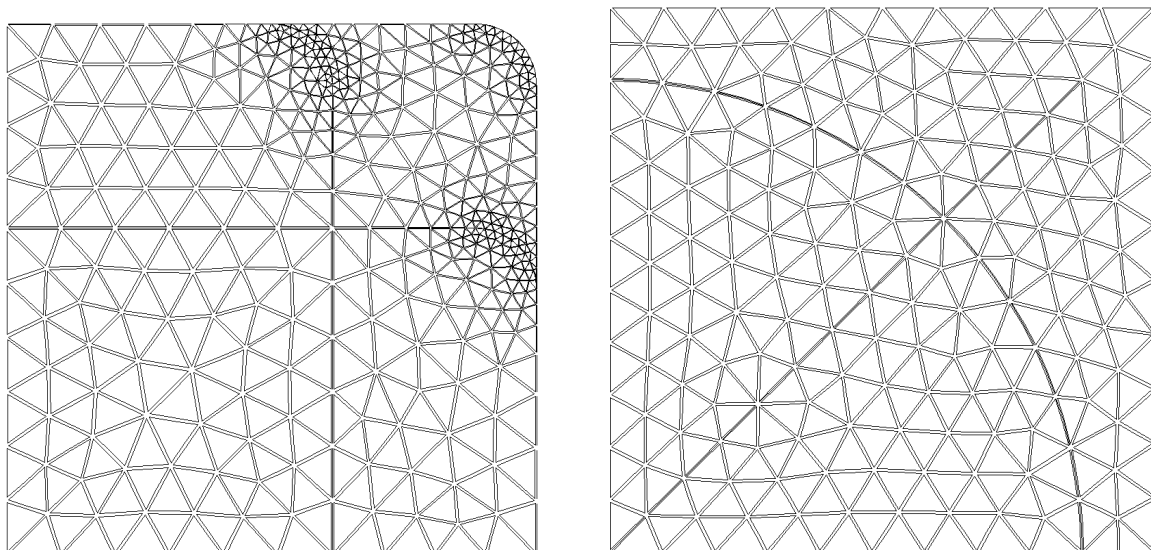
Tablica 5.1: Podstawowe dane badanych próbek, opisanych przez [128].

Oznaczenie	Wytrzymał. betonu f_c [MPa]	Wytrzymał. stali f_{yt} [MPa]	Stopień zbr. poprzecz. ρ_T [%]	Minimalny st. zbr. wg [2]
T1	34,4	274,7	2,20	2,26
T2	68,7	412,0	2,90	3,01
4S1	34,4	274,7	2,05	1,63
4S2	68,7	412,0	3,07	2,17
4S3	34,4	274,7	4,74	1,63
4S4	34,4	274,7	3,65	1,63
4S5	34,4	274,7	1,54	1,63
5S1	34,4	274,7	2,64	1,64
5S2	68,7	412,0	1,76	2,19
5S3	34,4	274,7	2,24	1,64
5S4	34,4	274,7	2,20	1,64
5S5	34,4	274,7	1,26	1,64
ST1	34,4	274,7	1,55	b.d.
ST2	68,7	412,0	2,09	b.d.
ST3	34,4	274,7	2,06	b.d.
ST4	34,4	274,7	2,75	b.d.
ST5	34,4	274,7	2,25	b.d.
ST6	34,4	274,7	1,55	b.d.

nami czterociętymi. Druga seria, oznaczona 4S (ang. *4 spirals*), obejmuje 5 krótkich słupów zbrojonych czterema rozsuniętymi, częściowo wzajemnie na siebie zachodzącymi zwojami. Trzecia opisana jako 5S (ang. *5 spirals*) składała się z 5 próbek z jednym głównym zwojem i czterema mniejszymi umieszczonymi w narożach kwadratowego przekroju poprzecznego. Ostatnią serię, nazwaną ST (ang. *spiral-tie*), stanowiło 6 próbek, na których uzwojenie składał się jeden główny zwój oraz umieszczone wzdłuż przekątnych przekroju jednocięte strzemiona (przytrzymujące pręty zbrojenia podłużnego umieszczone najbliżej naroży). Próbki poszczególnych serii pomiędzy sobą różniły się stopniem zbrojenia poprzecznego, skokiem uzwojenia (lub rozstawem strzemion), średnicą użytych prętów, a także zastosowanymi materiałami (tab. 5.1).

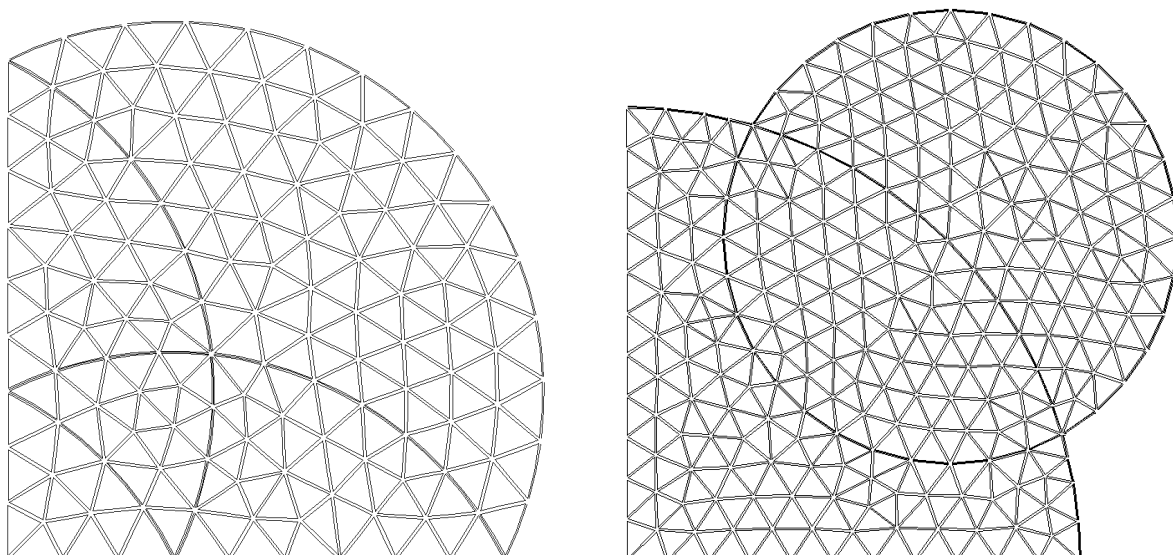


Rysunek 5.1: Przekroje poprzeczne próbek za [128, 127].



(a)

(b)

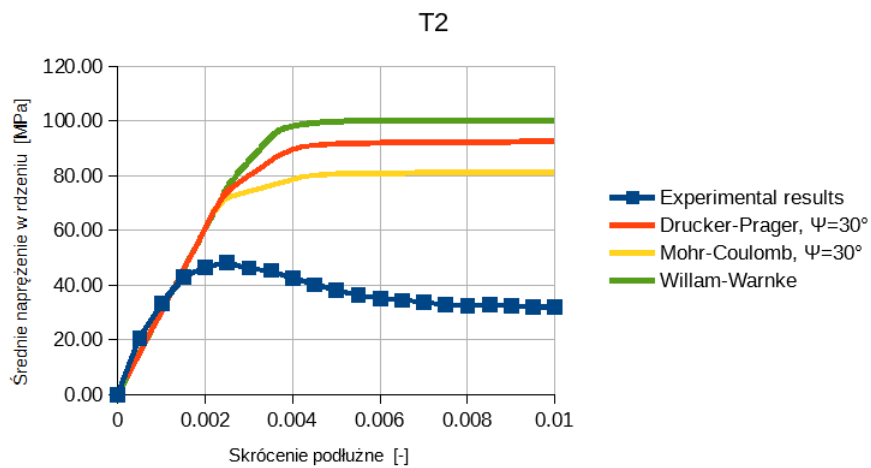
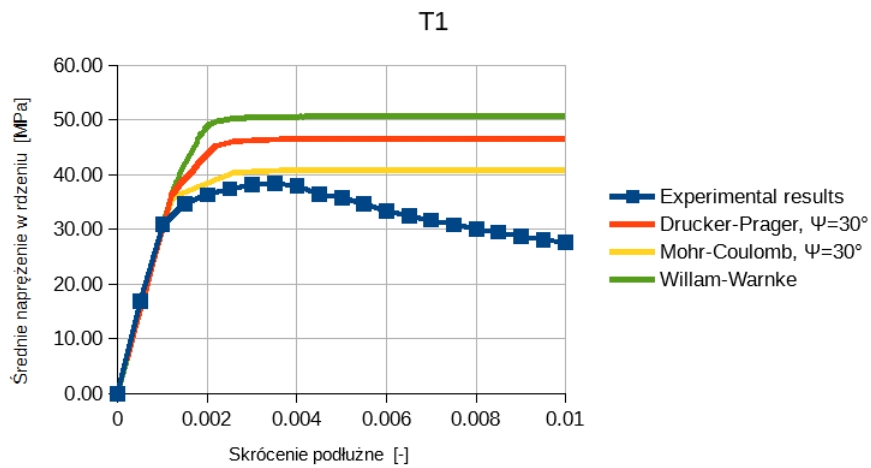


(c)

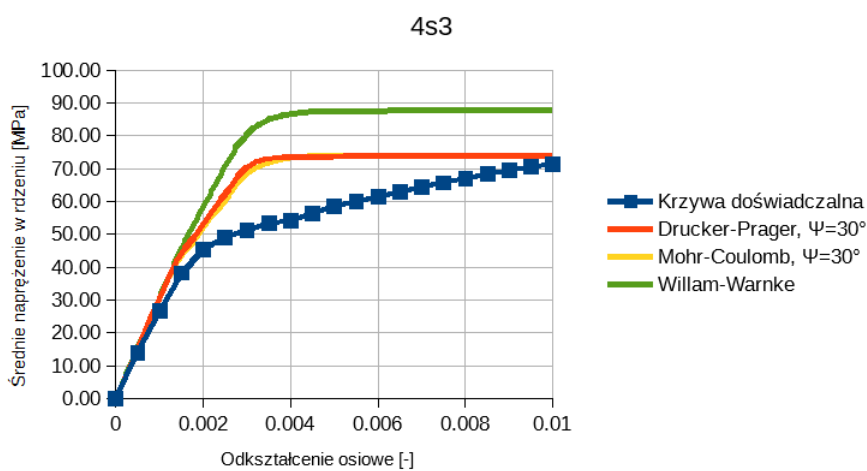
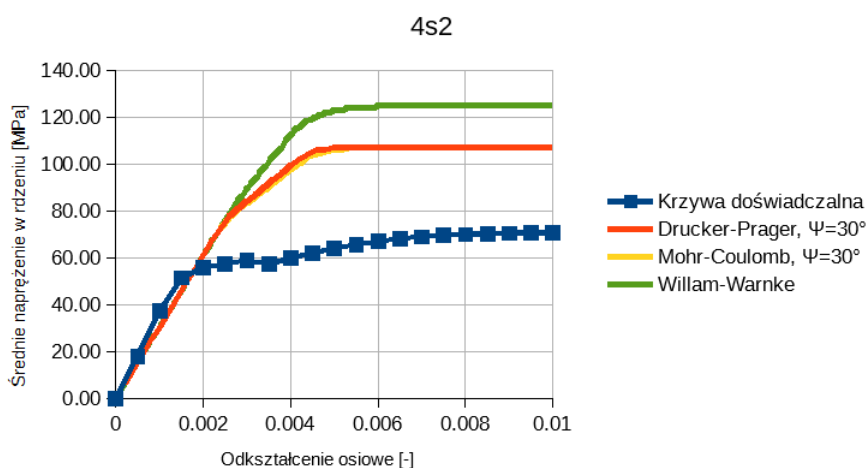
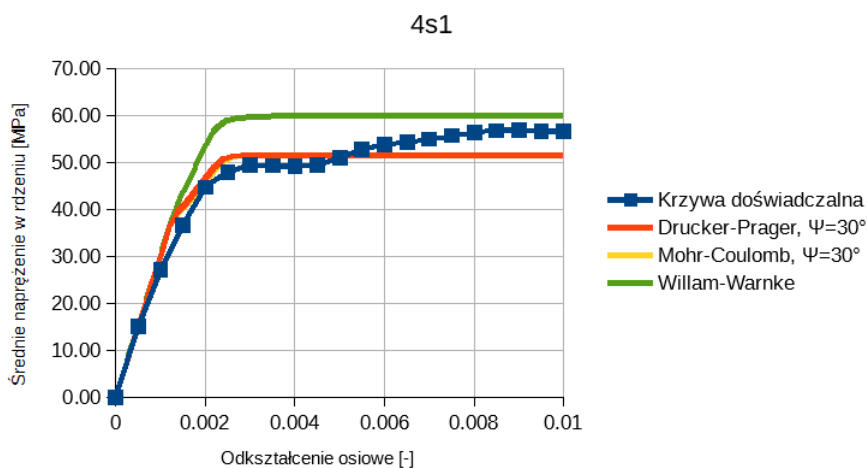
(d)

Rysunek 5.2: Siatki wykorzystane przy prowadzonych symulacjach.

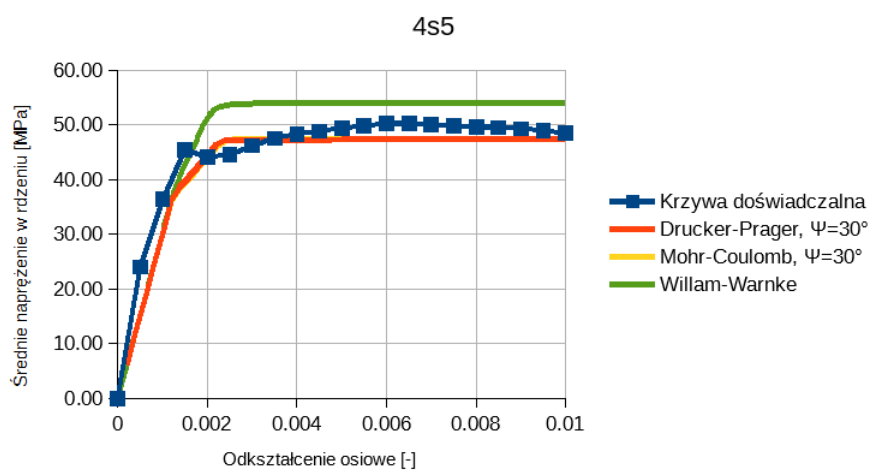
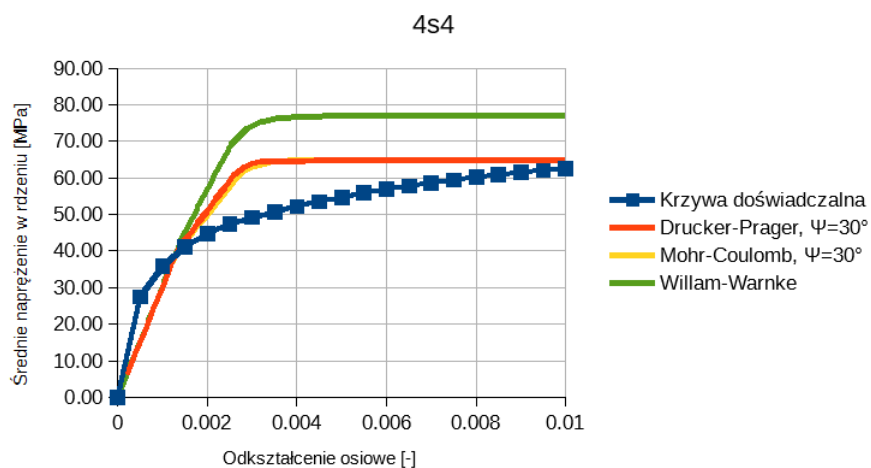
Porównanie rezultatów opublikowanych przez autorów [128, 127] z wynikami przeprowadzonych symulacji zaprezentowano na wykresach przedstawiających średnie naprężenia normalne w rdzeniu betonowym w funkcji odkształcenia słupa (skrócenia). Kolorem niebieskim zaznaczono przebieg krzywej doświadczalnej, kolorem czerwonym symulacje z warunkiem plastyczności Druckera–Pragera, żółtym Mohra–Coulomba, zielonym Willama–Warnkego. Pomimo, że rzeczywiste próbki traciły resztę nośności przy wyższych odkształceniach symulacje kończono przy odkształceniu 1 %.



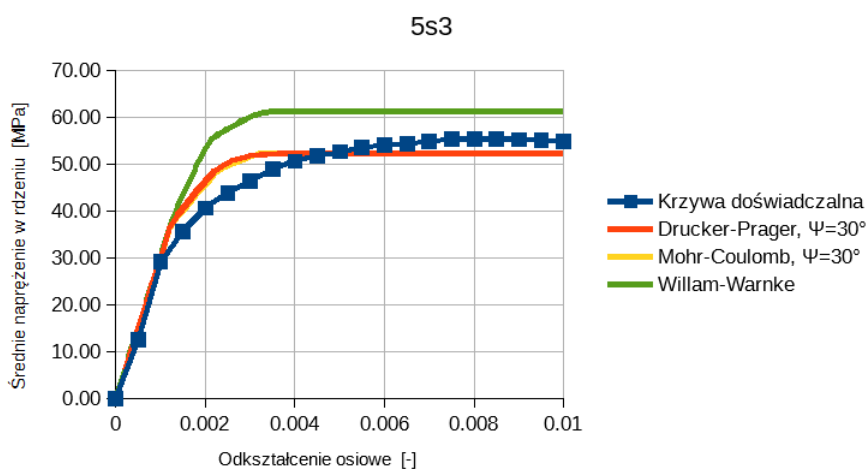
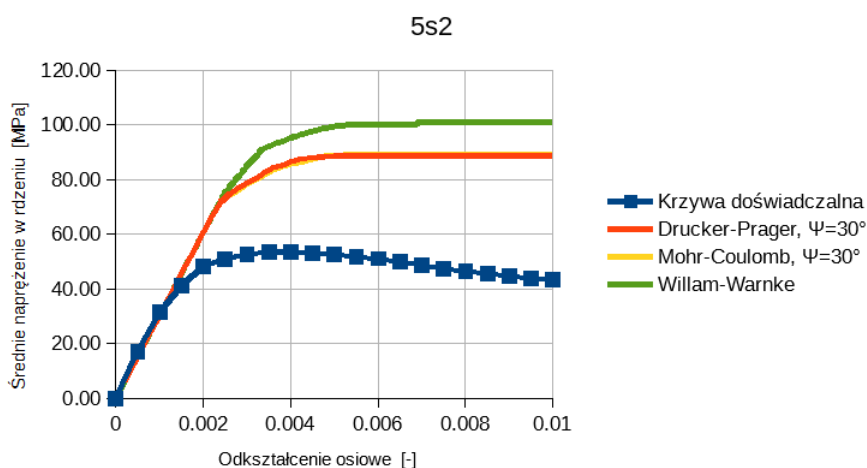
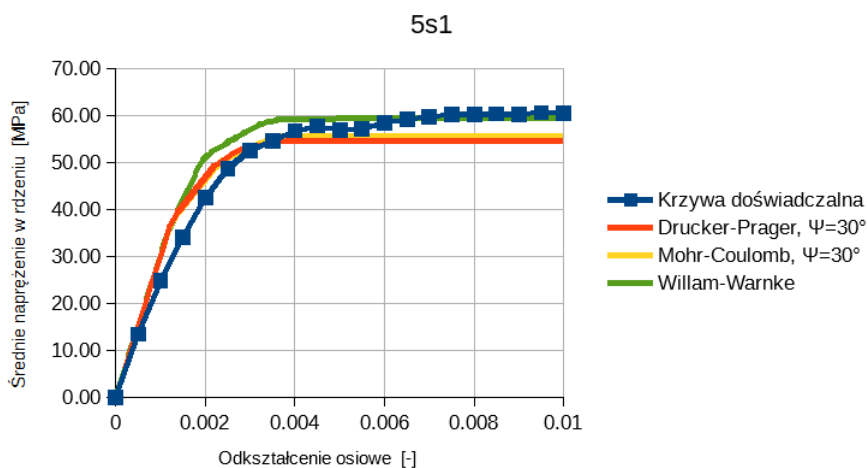
Rysunek 5.3: Wykresy średnie naprężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii T.



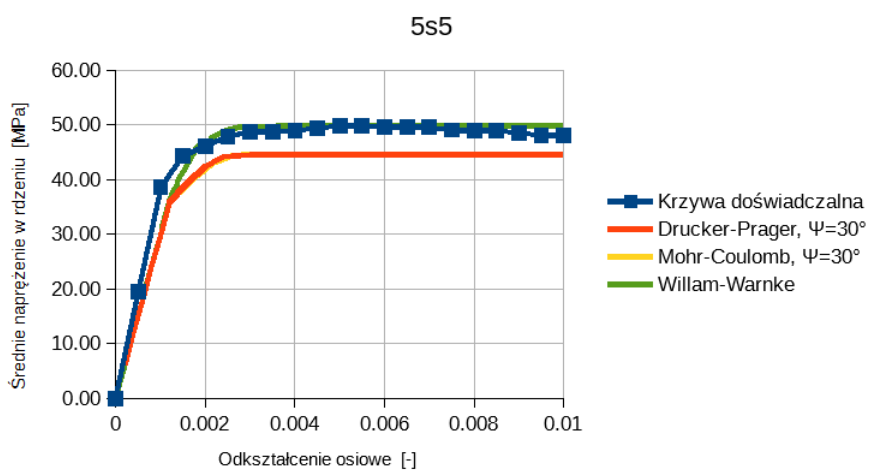
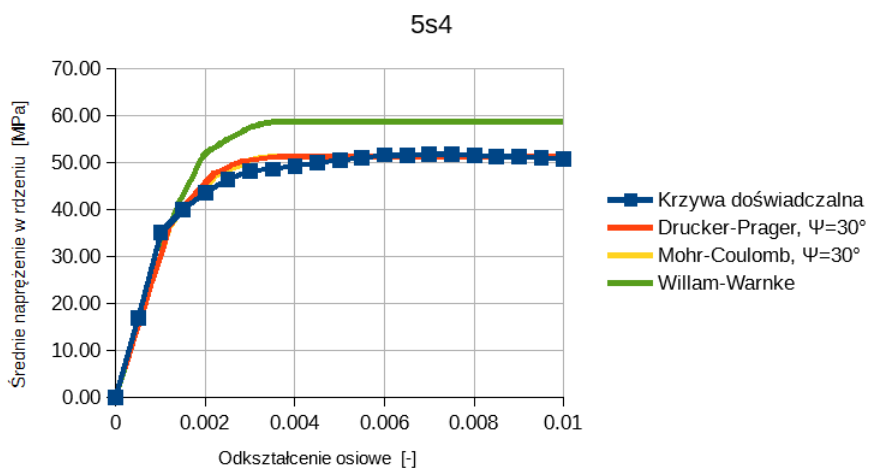
Rysunek 5.4: Wykresy średnie napężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii 4S.



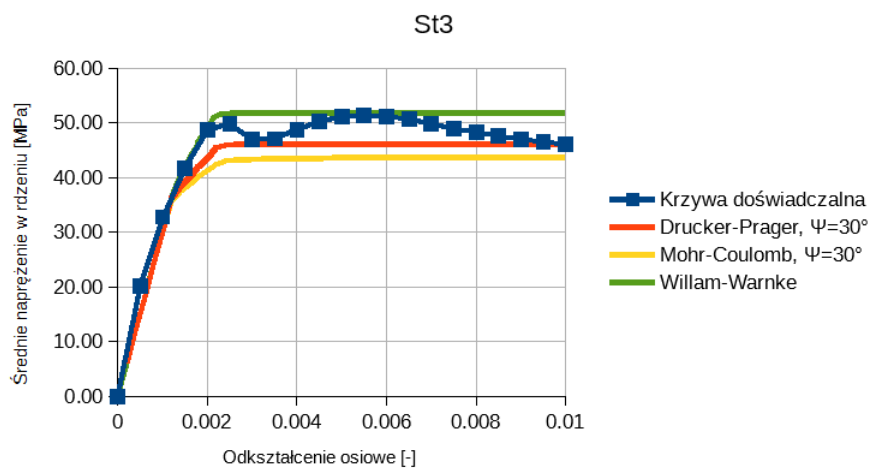
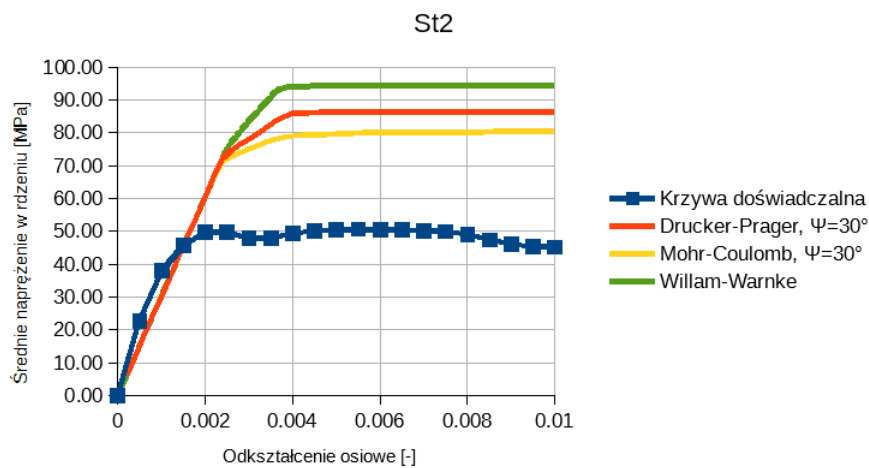
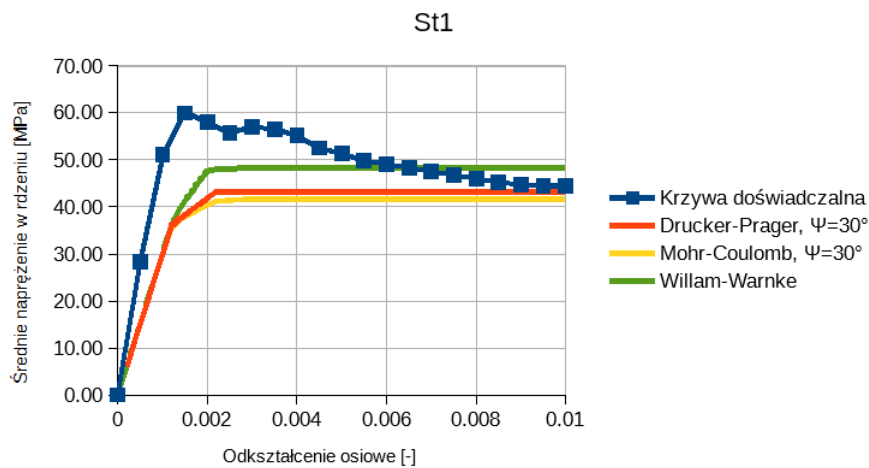
Rysunek 5.5: Wykresy średnie napężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii 4S.



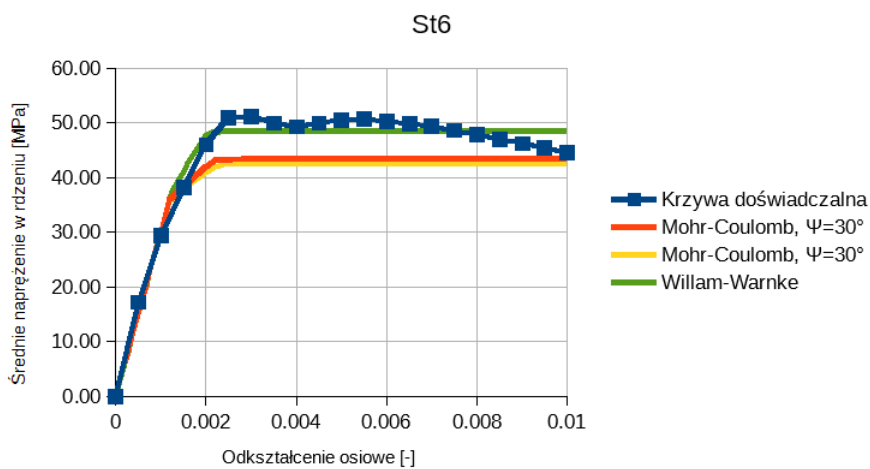
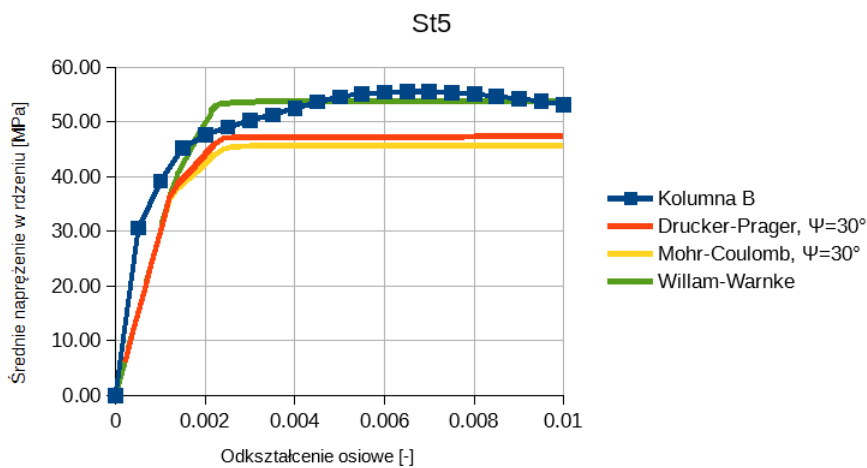
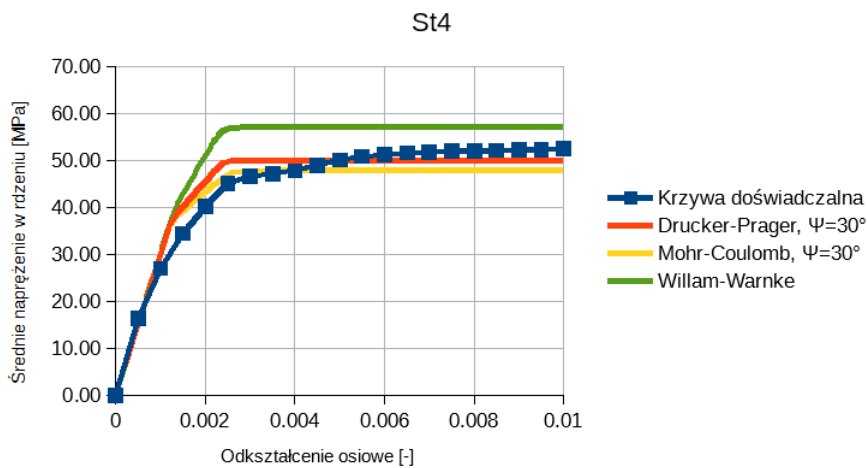
Rysunek 5.6: Wykresy średnie naprężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii 5S.



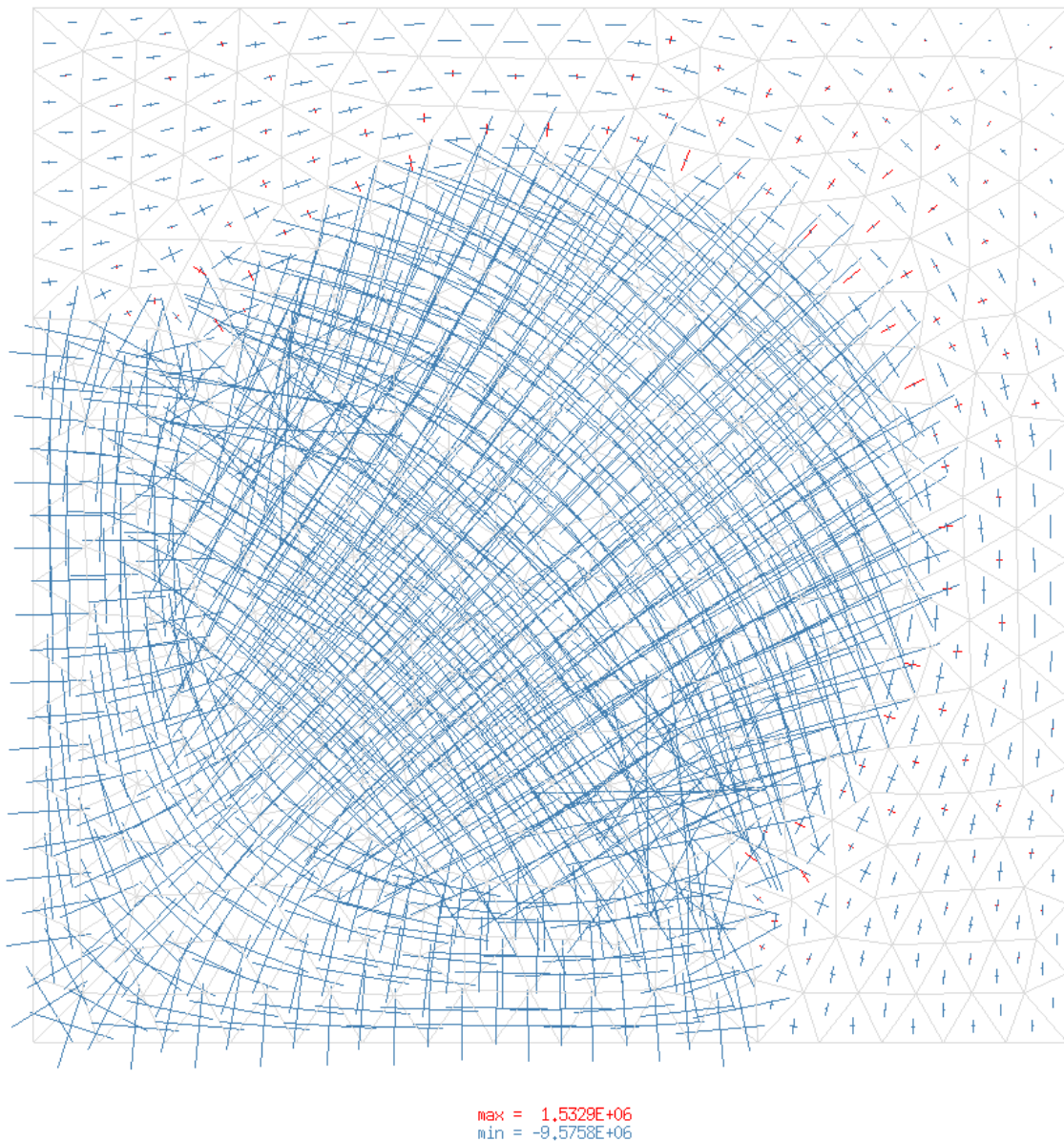
Rysunek 5.7: Wykresy średnie napężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii 5S.



Rysunek 5.8: Wykresy średnie napężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii ST.



Rysunek 5.9: Wykresy średnie naprężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii ST.



Rysunek 5.10: Rozkład naprężeń osiowych w modelu próbki 5S1. Na wstępnym etapie wykorzystano siatkę wraz z otuliną rdzenia, widoczne są naprężenia rozciągające na granicy tych obszarów.

Analiza modelu obliczeniowego

Na podstawie powyższych wykresów możemy zauważyć pewne prawidłowości. Po pierwsze zauważamy, że dla tych samych parametrów materiałowych najwyższe rezultaty otrzymywane są dla modelu Wilama–Warnkego (dalej w skrócie WW), najniższe dla modelu Mohra–Coulomba (dalej MC), zaś model Druckera–Pragera (dalej DP) daje wynik pośredni, przy czym dla przekrojów zbrojonych wyłącznie spiralami (gdzie stan naprężenia

jest najbardziej jednorodny) wynik ten jest bardzo zbliżony do rezultatów z modelu MC. Fakt ten znajduje uzasadnienie w konstrukcji warunków plastyczności:

1. W modelu DP powierzchnią plastyczną jest stożek opisany na ostrosłupie MC. W typowej dla przekroju skrępowanego sytuacji zniszczenie przekroju (jego pełne uplastycznienie) następuje w stanach naprężenia, którym odpowiadają w przestrzeni naprężeń głównych punkty znajdujące się w pobliżu krawędzi ostrosłupa MC będącej częścią wspólną ze stożkiem DP. Stan naprężenia w punktach ulegających uplastycznieniu zwykle kształtuje się tak, że naprężenie ściskające wzdłuż osi słupa (jedno z naprężeń głównych) osiąga wartość ekstremalną, zaś pozostałe naprężenia główne (w płaszczyźnie przekroju poprzecznego słupa) osiągają wartości wielokrotnie niższe, także ściskające. Warto zaznaczyć, że w przypadku uzwojenia okrągłego wartości obydwu pozostałych naprężeń są porównywalne co do wartości i praktycznie stałe na całej powierzchni rdzenia, zaś w przypadku uzwojenia bardziej złożonego pojawiają się zauważalne różnice w wartościach w różnych częściach przekroju, oraz różnice między σ_I i σ_{II} w danych punktach przekroju. Im większa jest ta różnica tym bardziej oddala się rozwiązanie uzyskane modelem MC do uzyskanego modelem DP.

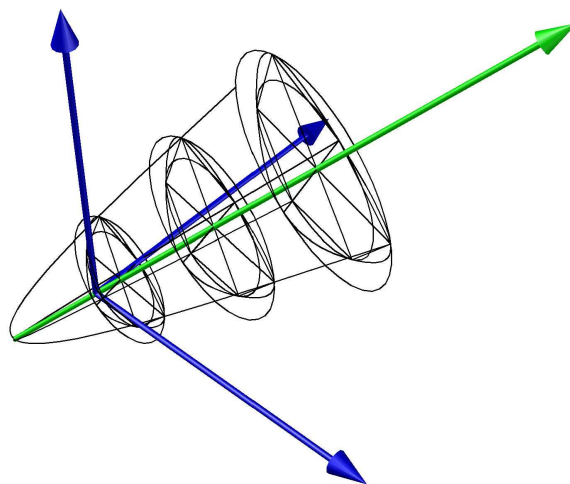
2. Model WW ma wbudowane stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia, co odpowiada osiąganiu wyższych wartości kąta dylatacji ψ . Jest to równoznaczne ze zwiększonym wzrostem objętości uplastyczniającego się rdzenia betonowego, to z kolei prowadzi do intensywniejszego oddziaływania na zbrojenie poprzeczne w drugiej fazie pracy przekroju – uplastycznienie rdzenia betonowego, przy sprężystej pracy uzwojenia. Zjawisko powyższe tłumaczy bardziej strome nachylenie wykresu σ – ε w tej fazie pracy.

Drugą wspólną cechą charakterystyczną dla wszystkich symulacji jest przebieg relacji naprężenie–skrócenie. Możemy we wszystkich symulacjach wyróżnić następujące etapy pracy słupa (rys. 5.12):

1. Faza pierwsza – praca sprężysta. Zastosowane uzwojenie, ograniczając odkształcalność poprzeczną, nieznacznie wpływa na wzrost sztywności osiowej słupa betonowego w porównaniu z analogicznym przekrojem nieuzwojonym. Wielkość efektu zależy od stopnia zbrojenia poprzecznego, jego kształtu oraz stosunku modułu Younga materiałów uzwojenia i rdzenia, także od stałej Poissona betonu ν_c . Relacja σ – ε jest liniowa. Za umowne granice pierwszej fazy pracy przekroju przyjmijmy: początek – początek obciążenia przekroju oraz koniec – początek uplastycznienia rdzenia.

2. Faza druga – wyraźny wzrost wartości naprężenia w uzwojenia. W momencie gdy rdzeń doznaje odkształceń plastycznych rozpoczyna się zasadnicza praca uzwojenia i od tego etapu istotnie wpływa na zachowanie mechaniczne rdzenia. Ograniczając odkształcenia poprzeczne wywołuje powstawanie naprężeń ściskających w płaszczyźnie przekroju, które umożliwiają osiąganie wyższych wartości naprężeń ściskających w osi słupa betonowego. Dzieje się tak dlatego, że wówczas rośnie wartość pierwszego niezmiennika stanu naprężenia I_1 , a uplastycznienie dokonuje się na płaszczyźnie dewiatorowej

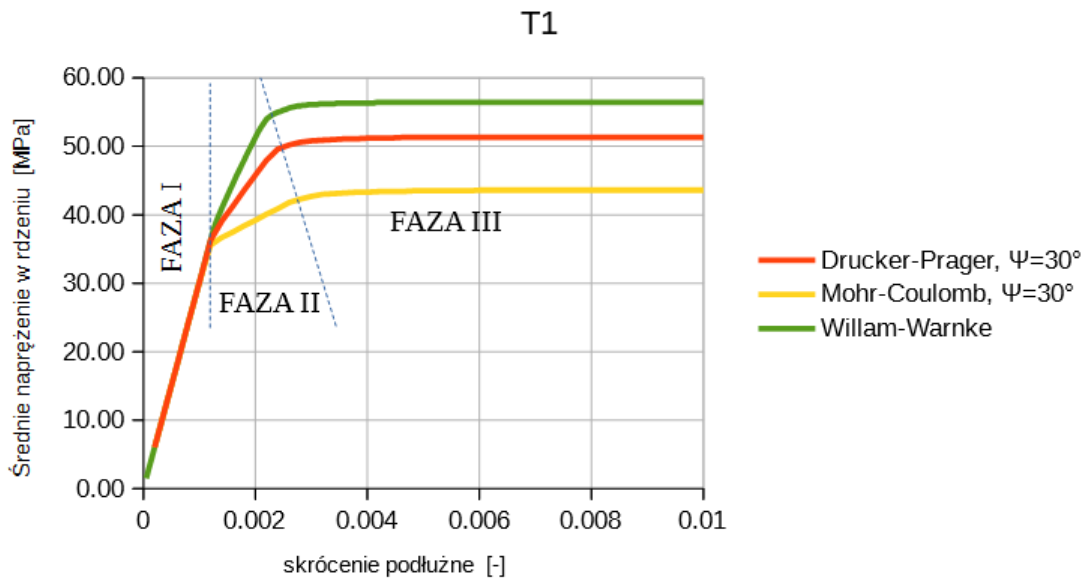
położonej dalej od początku układu współrzędnych (rys. 5.11). W przypadku modeli MC, DP i WW pozwala to osiągnąć na powierzchni plastycznej wyższe wartości drugiego niezmiennika dewiatora J_2 . Wykorzystując opis stanu naprężenia wg Haigha–Westergaarda taki stan rzeczy można wyrazić następująco: wyższa wartość współrzędnej hydrostatycznej ξ pozwala przed uplastycznieniem osiągnąć wyższe wartości promienia dewiatorowego ρ dla odpowiadających wartości kąta Lodego θ .



Rysunek 5.11: Wizualizacja przestrzeni naprężeń z zaznaczoną osią hydrostatyczną (zielona) i płaszczyznami dewiatorowymi.

Za umowne granice 2. fazy pracy możemy przyjąć: początek – pełne uplastycznienie rdzenia betonowego, koniec – początek uplastycznienia uzwojenia. Kształt zależności $\sigma(\varepsilon)$ jest liniowy lub zbliżony do liniowego lecz mniej stromy niż w pierwszej fazie. Główne czynniki wpływające na charakter pracy przekroju w tym zakresie to wartości granic plastyczności materiałów (determinujące początek i koniec przedziału), a także kąt dylatacji ψ betonu w przypadku modeli z niestowarzyszonym prawem płynięcia. Dodatkowo istotne jest ukształtowanie uzwojenia, stopień zbrojenia poprzecznego i jego moduł Younga.

3. Faza trzecia – plastyczne płynięcie całego przekroju. Po osiągnięciu granicy plastyczności przez pręty zbrojenia poprzecznego następuje równomierny przyrost odkształceń, któremu nie towarzyszy zmiana wartości naprężeń. Zastosowane modele obliczeniowe nie zostały wyposażone w mechanizmy pozwalające zaobserwować destrukcję materiału dla wyższych wartości odkształceń i związany z tym spadek nośności, jednak pozwalają odszukać wartość szczytową średnich naprężeń w rdzeniu, która jest najistotniejszą informacją dotyczącą badanego przekroju poprzecznego z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji. Obliczenia przerywano po osiągnięciu odkształcenia podłużnego 10%. Relacja $\sigma-\varepsilon$ w tym przedziale jest funkcją stałą. Wartość graniczna naprężeń zależy przede wszystkim od kształtu zbrojenia poprzecznego, stopnia zbrojenia oraz granicy plastyczności stali zbrojeniowej oraz od wytrzymałości betonu, z którego wykonano rdzeń.



Rysunek 5.12: Fazy pracy przekroju na przykładzie przekroju kwadratowego zbrojonego strzemionami prostymi.

Ponadto warto zauważyć, że przejścia między tak zdefiniowanymi fazami są ostre tylko dla kołowego przekroju z okrągłym uzwojeniem, w którym występuje jednorodny stan naprężenia. W pozostałych przypadkach pojawiają się odcinki przejściowe, przyjmujące zwykle kształt krzywej gładko przechodzącej między odcinkami liniowymi. Dodatkowo im mniej osiowosymetryczne jest zbrojenie poprzeczne, tzn. jego kształt coraz bardziej różni się od okręgu, tym odcinki przejściowe są dłuższe a przejścia łagodniejsze. W przejściu z fazy pierwszej do drugiej występuje częściowe uplastycznienie rdzenia betonowego i stopniowe powiększanie obszaru uplastycznionego w rdzeniu. W przypadku przejścia z drugiej fazy do trzeciej zbrojenie poprzeczne stopniowo uplastycznia się umożliwiając redystrybucję naprężeń wewnątrz przekroju aż do jego pełnego uplastycznienia.

Modele obliczeniowe a wyniki badań wg [128, 127]

W większości przedstawionych przykładów widoczna jest zbieżność wyników modeli obliczeniowych z wynikami przedstawionych badań doświadczalnych. Najbliższe rozwiązania uzyskano dla serii zbrojonych spiralami, szczególnie serii 5S. Porównywalnie wysoką zgodność uzyskano dla serii ST, następnie 4S, zaś najmniej precyzyjnie model odzwierciedla wyniki serii T. Ponadto we wszystkich seriach pojawiły się pojedyncze próbki wyraźnie gorzej odwzorowane przez model obliczeniowy od pozostałych. Udało się wskazać wspólną cechę próbek T2, ST2, 4S2 i 5S2, które wykazywały najgorszą korelację, mianowicie wszystkie one i tylko one zostały wykonane z betonu wysokiej wytrzymałości, o wytrzymałości na ściskanie $f'_c = 68,7 \text{ MPa} \approx 10000 \text{ psi}$ i zbrojone strzemionami oraz spiralami ze stali o $f_{yt} = 412,0 \text{ MPa} \approx 60000 \text{ psi}$.

Powyższe spostrzeżenia nasuwają dwa główne wnioski:

1. Przedstawiony model obliczeniowy dobrze radzi sobie z szacowaniem nośności uzwojonych przekrojów betonowych wykonanych z betonów zwykłych, ale nie odzwierciedla dobrze procesów zachodzących przy skrępowaniu słupów wykonanych z betonów wysokich wytrzymałości. Na odmienny charakter zjawiska w takich sytuacjach zwrócono już uwagę w podsumowaniu rozdziału 2. i brak w tym zakresie uniwersalności modelu obliczeniowego był przewidywaną i przedstawioną w tezie badawczej konsekwencją przyjętych na wstępie założeń.
2. Gorsze odwzorowanie nośności przekroju w przypadku próbki uzwojonej wyłącznie strzemionami może mieć dwie podstawowe przyczyny: założona w modelu zgodność przemieszczeń węzłów elementów rdzenia betonowego i prętów uzwojenia odpowiada idealnej przyczepności i ciągłości uzwojenia na obwodzie. Uproszczenie to jest z natury odpowiednie dla zbrojenia poprzecznego wykonanego z ciągłego zwoju, ale przy stosowaniu strzemion wymaga większej ostrożności. Spajanie prętów zbrojenia poprzecznego zapewniłoby ich ciągłość, ale jest niepraktyczne i właściwie niespotykane. Zbliżony efekt mogłoby przynieść stosowanie zakładu na pełną długość zakotwienia, lecz to z kolei, choć dużo prostsze, przyczynia się do zwiększenia zużycia materiału. Ze zdjęć zamieszczonych w [128] wynika, że do wykonania zbrojenia poprzecznego próbki T1 użyto prętów gładkich, a zakotwienie stanowiły haki długości około 10 cm, co z jednej strony odpowiada standardom wykonawczym, lecz prawdopodobnie było niewystarczające by strzemiona na całej długości pracowały z pełną efektywnością. Druga możliwa przyczyna niższej dokładności oszacowania wynika z większej niejednorodności stanu naprężenia, którego odwzorowanie (szczególnie przez modele dwuparametrowe) w punktach uplastycznienia jest mniej dokładne.

5.2. Przekroje o różnym stopniu zbrojenia (przekroje kwadratowe, prostokątne, okrągłe)

Rozważany jest wpływ stopnia zbrojenia na efektywność skrępowania. W tym celu przeprowadzono obliczenia podzielone na kilka serii, z których każda wyróżniała się innym kształtem przekroju, zaś wewnątrz serii modele różniły się wyłącznie stopniem zbrojenia poprzecznego. Analizowano:

1. Przekrój kwadratowy o boku 400 mm, ze zbrojeniem w postaci strzemienia, którego oś położona jest 30 mm od krawędzi przekroju, a promień zaokrąglenia wynosi 20 mm (rys. 5.25a na stronie 112).

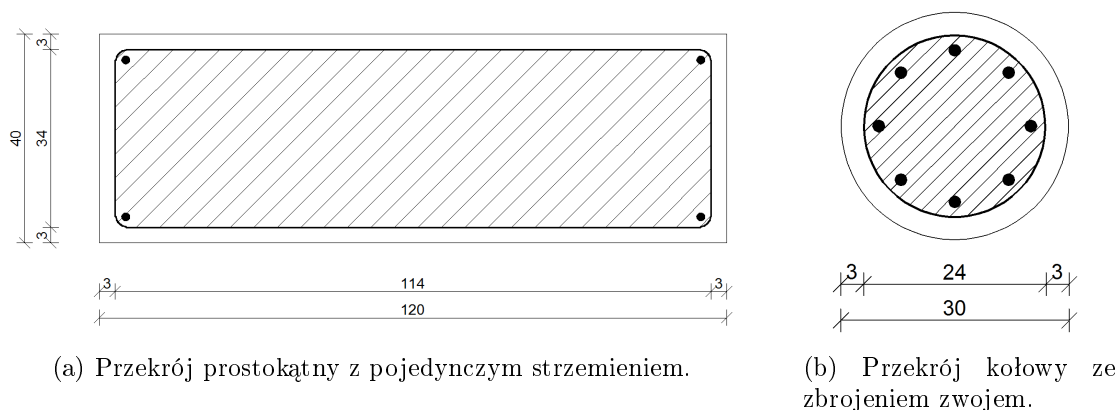
2. Przekrój kwadratowy taki jak wyżej z dodatkowym strzemieniem ułożonym pod kątem 45°, które podtrzymuje środki boków (patrz rys. 5.25b na stronie 112).

3. Przekrój prostokątny o wymiarach boków 400 mm i 1200 mm, ze zbrojeniem

w postaci strzemienia, którego oś położona jest 30 mm od krawędzi przekroju, a promień zaokrąglenia wynosi 20 mm (rys. 5.13a).

4. Przekrój kołowy o średnicy 300 mm ze zbrojeniem poprzecznym w postaci zwoju oddalonego od krawędzi przekroju o 30 mm, czyli o średnicy 240 mm (rys. 5.13b).

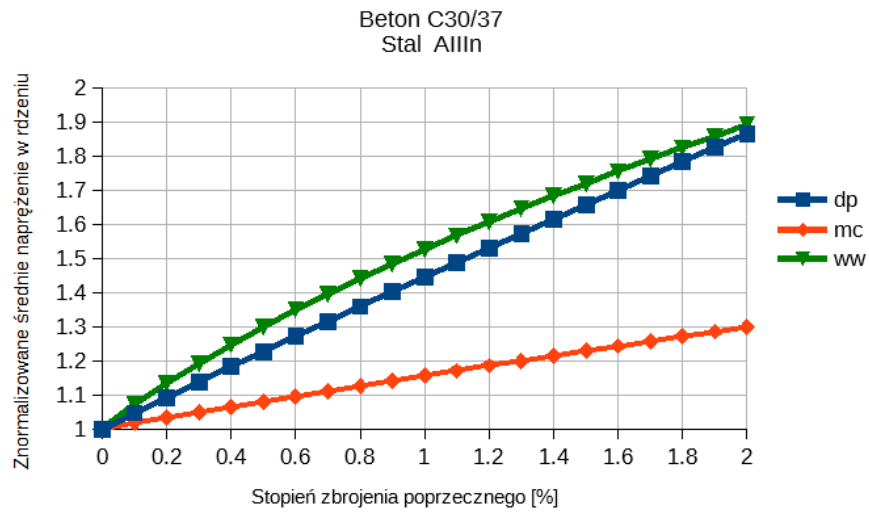
Zaproponowane układy zbrojenia pozwalają spełnić warunki konstrukcyjne określone przez polską normę PN-EN-1992-1-1 [33] przy wykonaniu strzemion z pręta $\phi 8$ i klasie agresji środowiska XC1, za wyjątkiem przekroju prostokątnego, który nie spełnia warunku konstrukcyjnego maksymalnego rozstawu prętów podłużnych podtrzymanych przez naroża strzemion. W przeprowadzonych obliczeniach wszystkie dane materiałowe przyjmowano o stałej wartości. Właściwości betonu odpowiadały wartościom charakterystycznym betonu klasy C30/37 według [33], czyli wytrzymałość na ściskanie $f_c = 30$ MPa, stała Poissona $\nu = 0,2$ oraz moduł Younga $E_c = 32$ GPa. Własności stali zbrojenia poprzecznego odpowiadają stali zbrojeniowej klasy AIIIIn o granicy plastyczności $f_y = 500$ MPa. Zbrojenie podłużne w rozważanych modelach zostało pominięte. Siatki obliczeniowe obejmowały wyłącznie rdzeń przekrojów zamknięty zbrojeniem poprzecznym (z uwagi na zjawisko *spallingu*), a wymiar elementu siatki wynosił 20 mm. Dla każdego przekroju wykonano 3 serie obliczeń, przyjmując w każdej z nich inny model konstytutywny betonu. Serie obejmowały 21 wariantów każda, gdzie 1 to przekrój pozbawiony uzwojenia ($\rho_T = 0$), a kolejne to warianty różniące się polem przekroju poprzecznego prętów uzwojenia w taki sposób, że stopień zbrojenia poprzecznego zmieniał się o 0,1% między kolejnymi wariantami. Główną poszukiwaną niewiadomą była końcowa (graniczna) wartość naprężeń normalnych wzdłuż osi słupa. Poszukiwano związku między tą wartością a stopniem zbrojenia poprzecznego. Poza tym analizowano rozkład naprężeń poprzecznych w badanych przekrojach oraz pole przemieszczeń. Wyniki obliczeń zebrano na wykresach oraz planach warstwicznych.



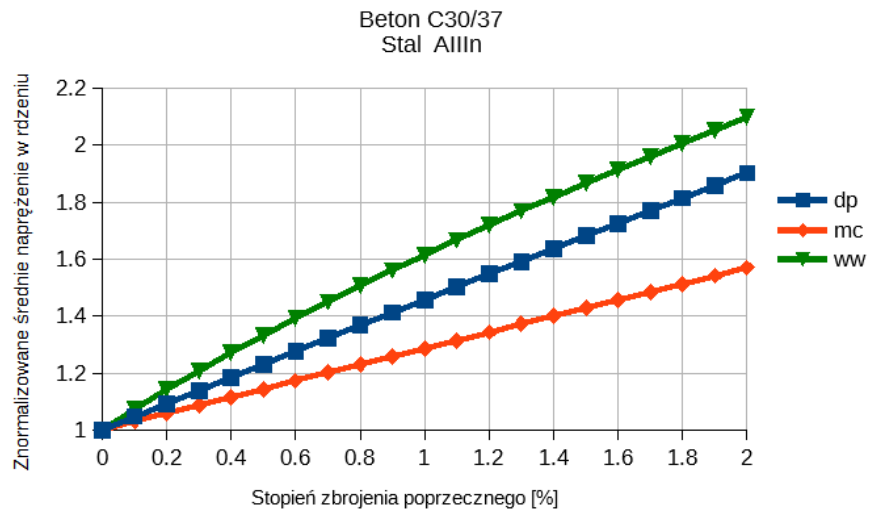
Rysunek 5.13: Przekroje poprzeczne. Analizowano zakresowany obszar rdzenia.

Dla poszczególnych przekrojów przedstawiono zależność znormalizowanych naprężeń w rdzeniu w funkcji stopnia zbrojenia (rys. 5.14, 5.15).

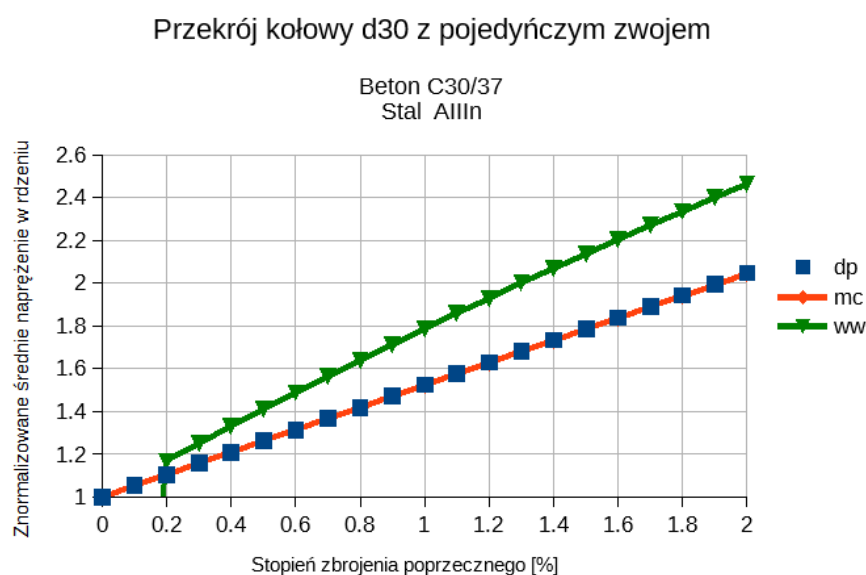
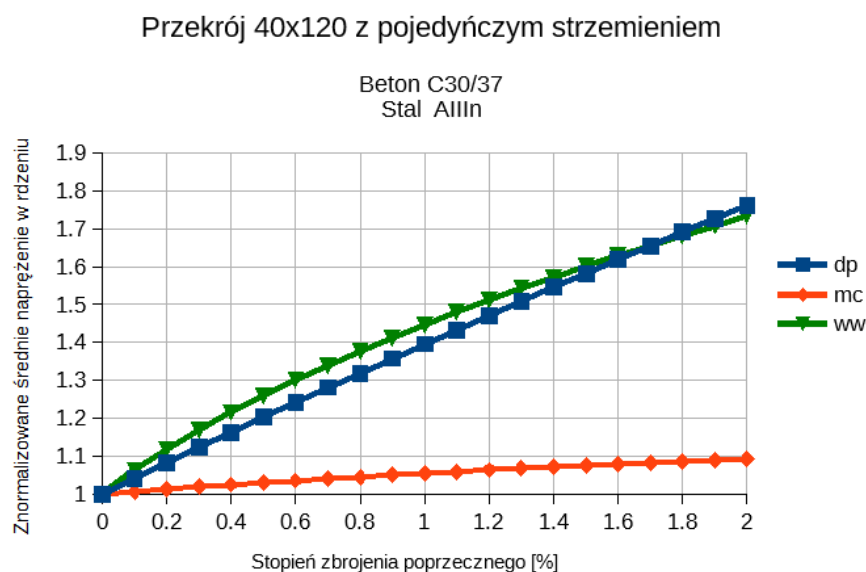
Przekrój 40x40 z pojedynczym strzemieniem



Przekrój 40x40 z podwójnym strzemieniem



Rysunek 5.14: Efektywność skrępowania w funkcji stopnia zbrojenia poprzecznego – przekroje kwadratowe.



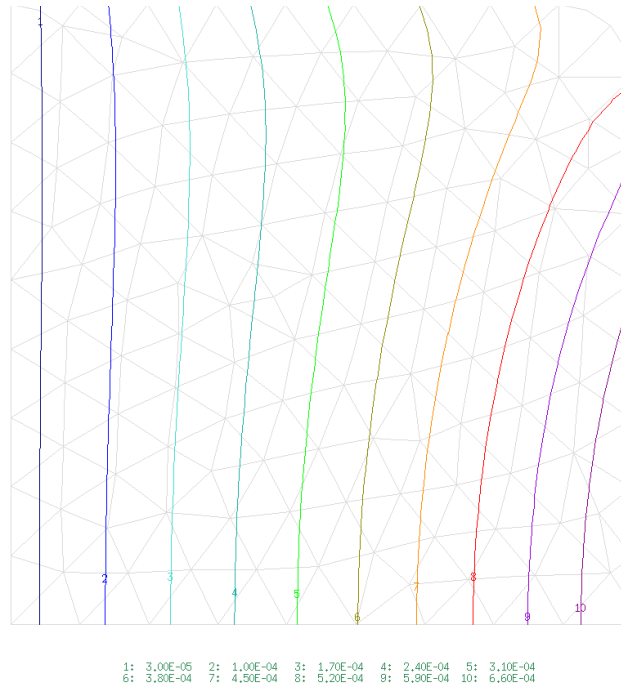
Rysunek 5.15: Efektywność skrępowania w funkcji stopnia zbrojenia poprzecznego – przekrój prostokątny i kołowy.

Pierwsza rzecz, którą łatwo zauważyć to właściwie liniowa korelacja między względnym przyrostem naprężeń osiowych w rdzeniu a stopniem zbrojenia poprzecznego w przypadku obliczeń prowadzonych przy wykorzystaniu modeli MC i DP oraz nieco krzywoliniowy kształt tej relacji przy obliczeniach z wykorzystaniem modelu WW. Sytuacja ta powtarza się we wszystkich przedstawionych przypadkach kształtu przekroju poprzecznego. Ten stan rzeczy związany jest ściśle z kształtem poszczególnych powierzchni plastyczności, a dokładniej ich śladów na płaszczyźnie wyznaczonej przez oś hydrostatyczną i punkty w przestrzeni naprężeń, w których dochodzi do uplastycznienia materiału rdzenia. Po-

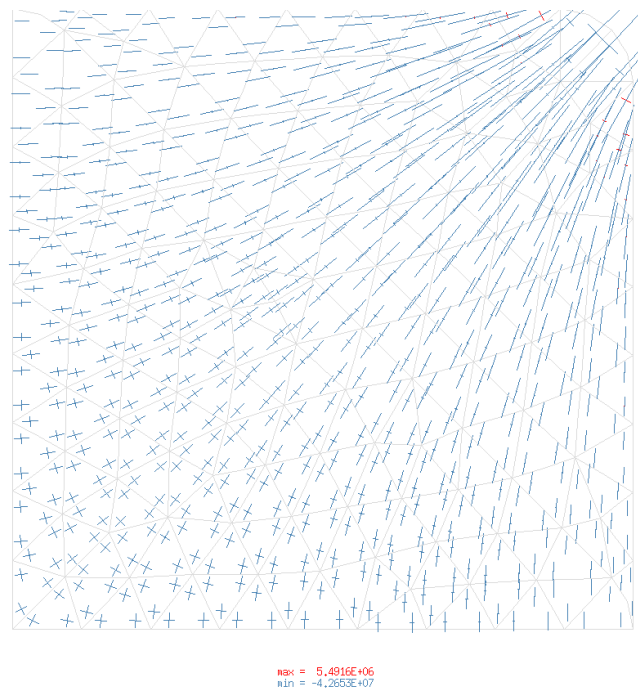
sługując się współrzędnymi Haigha–Westergaarda możemy powiedzieć, że w przypadku ostrosłupa MC oraz stożka DP wraz ze wzrostem ciśnienia ξ liniowo rośnie wartość promienia w płaszczyźnie dewiatorowej ρ . Z kolei w przypadku pięcioparametrowej wersji warunku WW, wykorzystanej w niniejszych obliczeniach, powierzchnia plastyczna jest powłoką nieobrotową i związek między ρ i ξ jest funkcją wymierną o wielomianie 2. stopnia w mianowniku. Niemniej liniowa lub zbliżona do liniowej zależność pomiędzy stopniem zbrojenia poprzecznego a przyrostem nośności wynikającym z uzwojenia przekroju jest zgodna z większością wniosków zawartych w pracach zestawionych w tabelach 2.1, 2.2, 2.3.

Kolejna informacja, jaką możemy uzyskać z przeprowadzonej symulacji, dotyczy wpływu wybranego modelu obliczeniowego na rozkład naprężeń krępujących i schemat pracy rdzenia w stanie pełnego uplastycznienia. W przypadku przekroju kołowego stan naprężenia jest jednorodny i różnice takie właściwie nie występują pomiędzy modelami, ale w pozostałych wariantach są zauważalne. Na rysunkach 5.16, 5.17, 5.18 przedstawiono, na przykładzie przekroju kwadratowego z pojedynczym strzemieniem, rozkład pola poziomej składowej wektora przemieszczenia oraz kierunki i wartości naprężeń głównych w punktach całkowania numerycznego przy wartości skrócenia słupa $\varepsilon_z = 4\%$. Przy tym odkształceniu cały rdzeń znajduje się w stanie pełnego uplastycznienia. Szczególnie wyróżnia się tu model MC, w którym to zarysował się wyraźnie podział na strefę efektywnie skrępowaną i strefę, w której naprężenia p normalne w płaszczyźnie przekroju są niewielkie. Przy obliczeniach prowadzonych z wykorzystaniem modeli DP i WW dla betonu także obserwujemy efektywniej skrępowany obszar w środkowej części, ale przy krawędziach przekroju naprężenia poprzeczne nie koncentrują się wyłącznie wzdłuż przekątnych. Podstawowa przyczyna tych różnic jest dość oczywista – w modelu MC na wyężenie wpływają wartości dwóch skrajnych naprężeń głównych i w miejscach gdzie jedno z naprężeń poprzecznych jest bardzo małe lub zerowe (np. środki boków rdzenia kwadratowego) wówczas nie obserwuje się żadnych korzyści skrępowania w tej części przekroju. Dla kontrastu, gdy obydwa naprężenia poprzeczne są dokładnie sobie równe co do wartości, wówczas zakres plastycznie dopuszczalnych naprężeń określonych modelem DP ze stożkiem opisanym dokładnie pokrywa się z modelem MC. Powierzchnia plastyczna WW jest prostopadła do południka wyznaczonego dla kąta Lodego $\theta = 60^\circ$, więc w pobliżu takiego punktu uplastycznienia prowadzi do uzyskania jakościowo zbliżonych rezultatów. Można zwrócić też uwagę – podobnie jak zrobił to Özetkin [82] prowadząc zbliżoną analizę różnic między modelem Druckera–Pragera w dwóch wariantach a modelem Mohra–Coulomba – na wyraźnie inny kierunek przyrostu odkształceń plastycznych w przypadku uplastycznienia w pobliżu krawędzi ostrosłupa Mohra–Coulomba odpowiadającej zniszczeniu w stanie trójosiowego ściskania (czyli $\theta \approx 60^\circ$). Schematycznie zobrazowano to na rys. 5.19. Wówczas każda mała zmiana kąta Lodego θ punktu uplastycznienia prowadzi do większego

skrócenia promienia ρ przestrzeni naprężeń plastycznie dopuszczalnych przy danym poziomie ciśnienia hydrostatycznego ξ niż w pozostałych analizowanych przykładach.

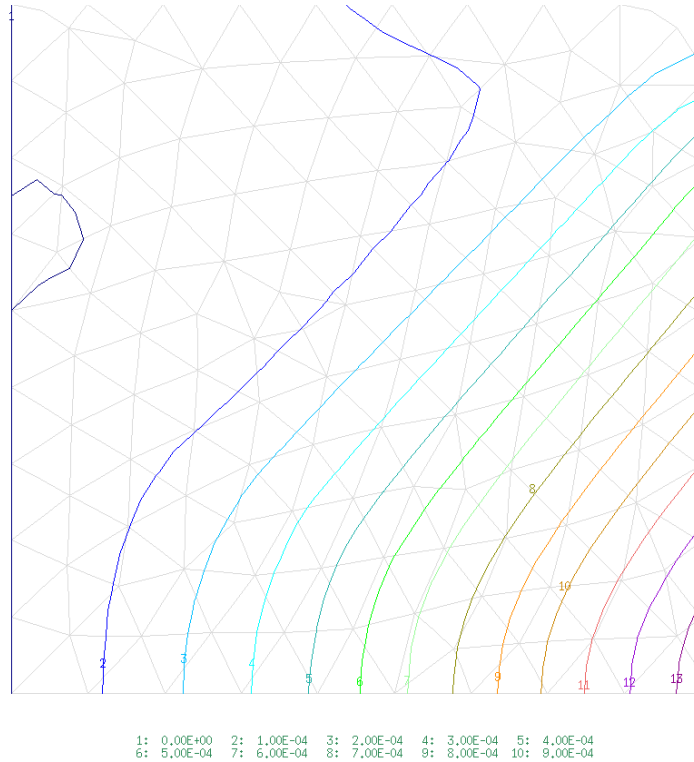


(a) Plan warstwowy składowej poziomej wektora przemieszczenia przy $\varepsilon_z = 4\%$, model DP.

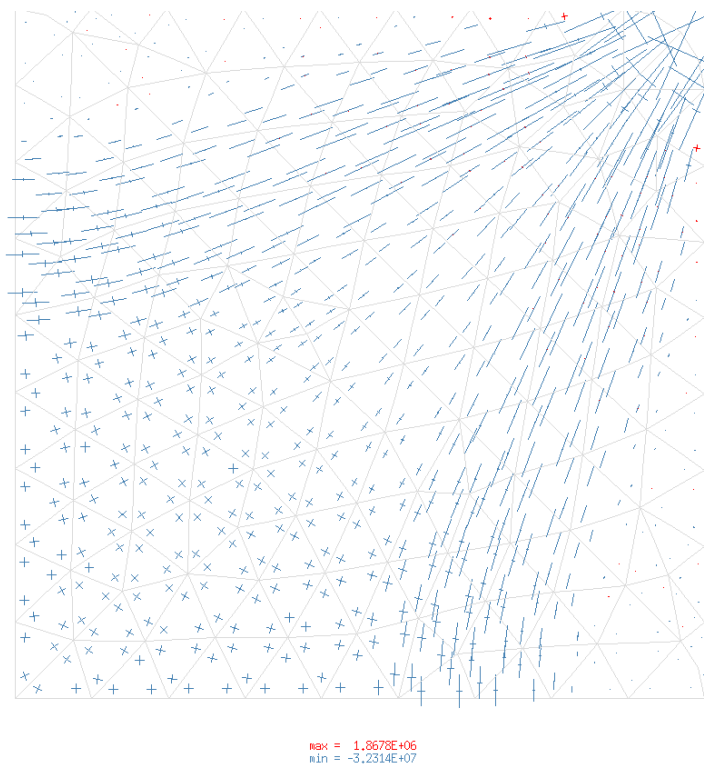


(b) Rozkład naprężeń głównych w płaszczyźnie przekroju przy $\varepsilon_z = 4\%$, model DP.

Rysunek 5.16: Wpływ modelu obliczeniowego na pole przemieszczenia i naprężenia w stanie pełnego uplastycznienia rdzenia.

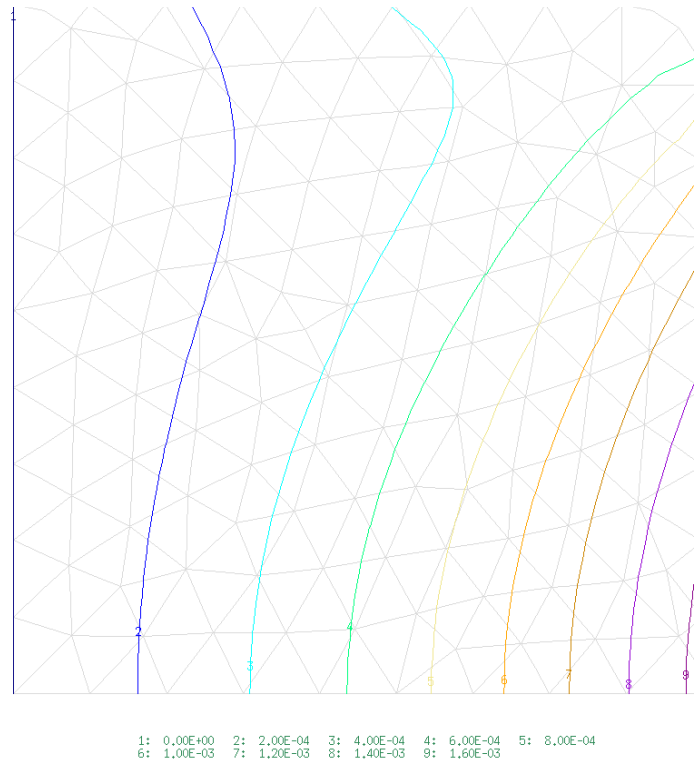


(a) Plan warstwowy składowej poziomej wektora przemieszczenia przy $\varepsilon_z = 4\text{‰}$, model MC.

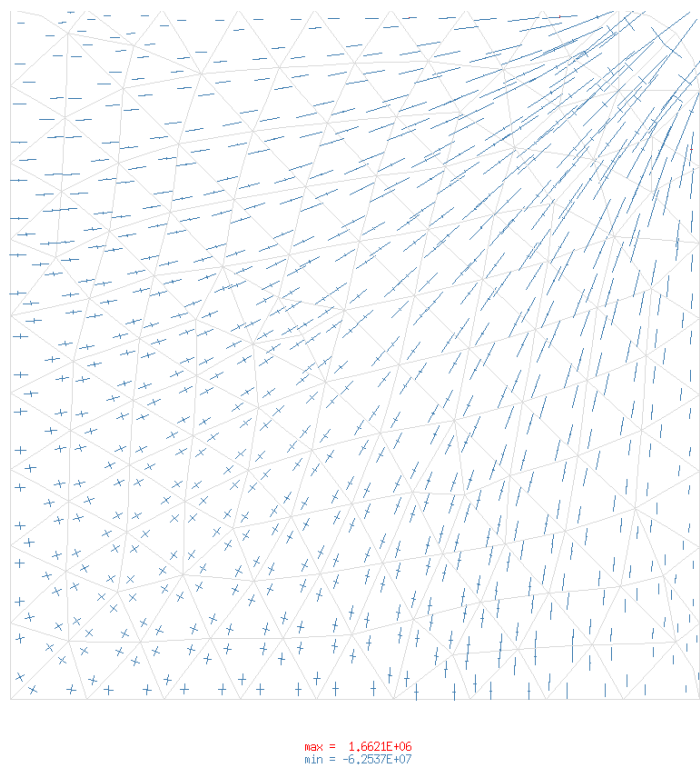


(b) Rozkład naprężeń głównych w płaszczyźnie przekroju przy $\varepsilon_z = 4\text{‰}$, model MC.

Rysunek 5.17: Wpływ modelu obliczeniowego na pole przemieszczenia i naprężenia w stanie pełnego uplastycznienia rdzenia.

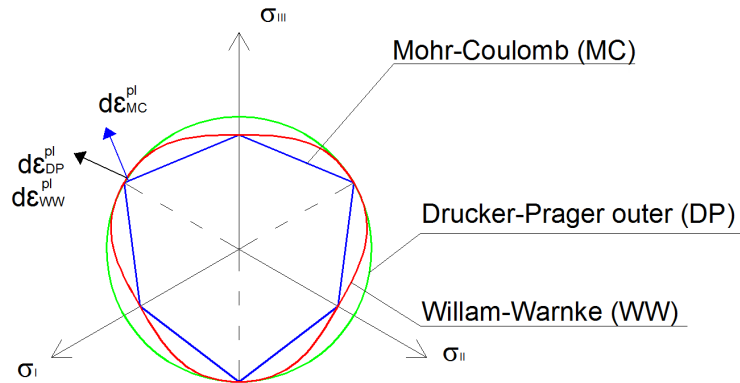


(a) Plan warstwowy składowej poziomej wektora przemieszczenia przy $\varepsilon_z = 4\text{‰}$, model WW.



(b) Rozkład naprężeń głównych w płaszczyźnie przekroju przy $\varepsilon_z = 4\text{‰}$, model WW.

Rysunek 5.18: Wpływ modelu obliczeniowego na pole przemieszczenia i naprężenia w stanie pełnego uplastycznienia rdzenia.



Rysunek 5.19: Schemat kierunku przyrostu odkształceń plastycznych rzutowanych na płaszczyznę dewiatorową. Opis w tekście.

5.3. Przekroje o różnych proporcjach długości boków (przekroje prostokątne)

W tym podrozdziale badany jest wpływ stosunku długości boków w przekrojach prostokątnych na efektywność skrępowania przy zastosowaniu zbrojenia poprzecznego w postaci tradycyjnych, dwuciętych strzemion obejmujących rdzeń, co oznacza równe pole przekroju poprzecznego prętów w obydwu kierunkach. Rozważono przekroje prostokątne o stosunkach boków od 1:1 do 3:1, uznając, że zastosowanie strzemion dwuciętych w słupach o wyższej wartości stosunku boków jest konstrukcyjnie nieuzasadnione, gdyż wskazane byłoby wówczas wprowadzenie zbrojenia wiążącego przeciwległe dłuższe boki. W niniejszej serii wykorzystano równoległe trzy modele fizyczne – takie jak w poprzednim podrozdziale – MC i DP z dylatacją i stałą wartością kąta tarcia wewnętrznego oraz WW o identycznie jak we wcześniej opisanym przykładzie zdefiniowanych parametrach a_0 , a_1 , a_2 , b_0 , b_1 , b_2 . Po uzyskaniu rozwiązania dla poszczególnych przekrojów porównano graniczną wartość średnich naprężeń w rdzeniu, czyli nośność przekroju bez uwzględnienia siły przenoszonej przez zbrojenie podłużne.

Opis przykładów obliczeniowych

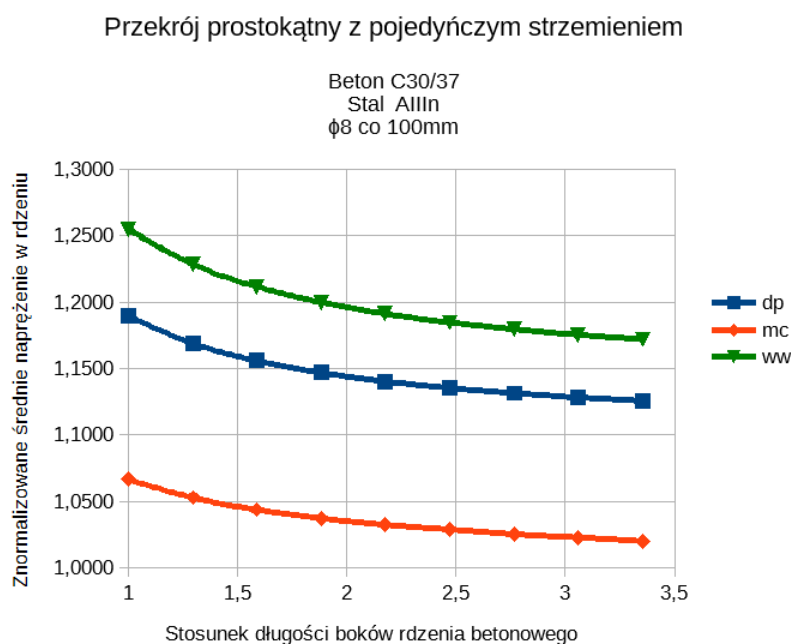
Badanie polegało na przeprowadzeniu obliczeń dla 9 przekrojów o wymiarach całkowitych od $400 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$ do $400 \text{ mm} \times 1200 \text{ mm}$ ze skokiem co 100 mm na długości jednego z boków. Dodatkowo przyjęto, że oś strzemion znajduje się 30 mm od krawędzi zewnętrznej oraz w narożach jest zakrzywiona wzdłuż łuku o promieniu 20 mm . Taki promień osi pręta uzyskanoby wykonując strzemiona z prętów średnicy $\phi 8$ i stosując się do zaleceń konstrukcyjnych podanych w normie PN-EN-1992-1-1 [33]. Daje to w rezultacie obszary rdzeni o bokach od $340 \text{ mm} \times 340 \text{ mm}$ do $340 \text{ mm} \times 1140 \text{ mm}$ z zaokrąglonymi narożami. We wszystkich symulacjach zastosowano te same materiały: beton o właściwo-

ściach odpowiadających betonowi C30/37 według [33], czyli wytrzymałości na ściskanie $f_c = 30$ MPa, stałej Poissona $\nu = 0,2$ oraz module Younga $E_c = 32$ GPa. Właściwości stali przyjęto o wartościach: granica plastyczności $f_y = 500$ MPa jak dla powszechnie stosowanych w budownictwie stali gatunków np. B500SP, BSt500S, RB500W, a moduł Younga ustalono za [33] jako $E_s = 200$ GPa. Obliczenia wykonano w dwóch wariantach:

wariant I – we wszystkich przekrojach jest stała wartość pola przekroju poprzecznego strzemion oraz stały jest ich rozstaw. Przy tym założeniu przyjęto wartość $A_s = 5$ cm²/mb odpowiadającą wykonaniu strzemion $\phi 8$ co 100 mm, co jak na wymiary słupa i realia wykonawcze jest wartością możliwą do zastosowania. Wówczas stopień zbrojenia poprzecznego zmienia się od $\rho_T = 0,414\%$ w przypadku najmniejszego przekroju do $\rho_T = 0,305\%$ dla największego.

wariant II – we wszystkich próbkach przyjmowano stałą wartość stopnia zbrojenia zbrojenia poprzecznego $\rho_T = 0,4\%$. Efekt ten uzyskiwano zwiększając pole przekroju zbrojenia przypadające na jednostkę długości słupa. Fizycznie efekt taki można uzyskać stosując strzemiona o stałej średnicy prętów i dostosowując ich rozstaw – dla prezentowanych modeli odpowiada to strzemieniu $\phi 8$ w rozstawie od 103,5 mm dla przekroju najmniejszego do 76 mm w przypadku przekroju najbardziej wydłużonego.

Wyniki symulacji zebrano w tabeli 5.2 oraz zobrazowano na poniższych wykresach 5.20, 5.21:



Rysunek 5.20: Naprężenia znormalizowane w funkcji stosunku boków rdzenia, wariant I – stałe pole przekroju zbrojenia poprzecznego.

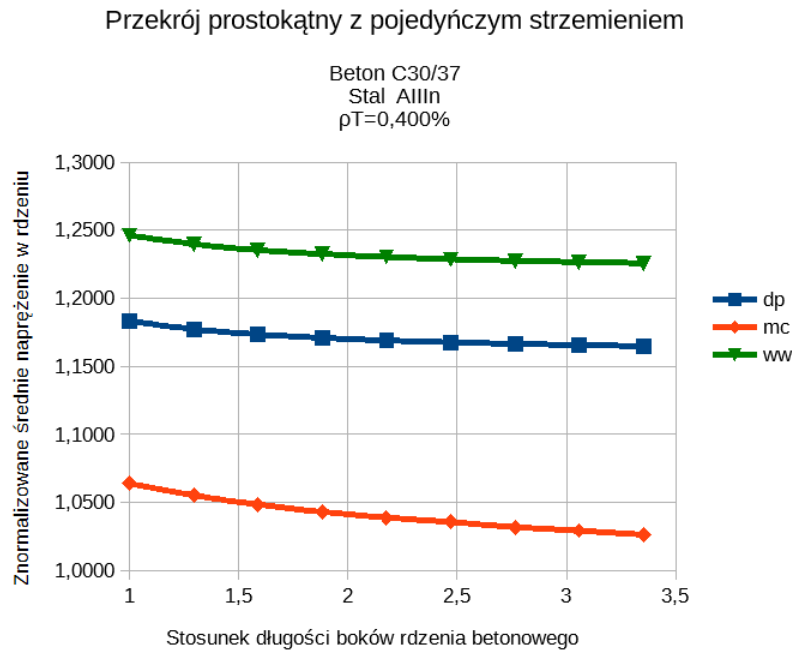
Tablica 5.2: Wyniki obliczeń, różne proporcje boków przekrojów prostokątnych.

(a) wariant I

Wymiar zewnętrzny b	[cm]	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Wymiar b _c	[cm]	34	44	54	64	74	84	94	104	114
Długość strzemiennia	[cm]	132,57	152,57	172,57	192,57	212,57	232,57	252,57	272,57	292,57
Pole przekroju słupa	[cm ²]	1600	2000	2400	2800	3200	3600	4000	4400	4800
Pole rdzenia betonowego	[cm ²]	1154,28	1494,28	1834,28	2174,28	2514,28	2854,28	3194,28	3534,28	3874,28
Stożek zbrojenia poprzecznego ρ _T	[%]	0,41428	0,38143	0,35952	0,34388	0,33214	0,32301	0,31571	0,30974	0,30476
a/b ⁻¹	[-]	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
a _c /b _c ⁻¹	[-]	1	1,2941	1,5882	1,8824	2,1765	2,4706	2,7647	3,0588	3,3529
Średnie graniczne naprężenie σ _z (DP)	[MPa]	34,4676	36,7819	38,5858	40,0262	41,2035	42,1822	43,0078	43,7136	44,3246
Średnie graniczne naprężenie σ _z (MC)	[MPa]	30,8950	33,1254	34,8353	36,1923	37,2990	38,2209	38,9710	39,6236	40,1680
Średnie graniczne naprężenie σ _z (WW)	[MPa]	36,3565	38,6588	40,4441	41,8737	43,0409	44,0157	44,8381	45,5422	46,1517
Efektywność skrępowania σ _z /f _{sk} (DP)	[-]	1,1899	1,1691	1,1560	1,1470	1,1404	1,1354	1,1315	1,1283	1,1257
Efektywność skrępowania σ _z /f _{sk} (MC)	[-]	1,0666	1,0529	1,0437	1,0372	1,0324	1,0288	1,0253	1,0228	1,0201
Efektywność skrępowania σ _z /f _{sk} (WW)	[-]	1,2551	1,2288	1,2117	1,2000	1,1913	1,1848	1,1797	1,1755	1,1721

(b) wariant II

Wymiar zewnętrzny b	[cm]	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Wymiar b _c	[cm]	34	44	54	64	74	84	94	104	114
Długość strzemiennia	[cm]	132,57	152,57	172,57	192,57	212,57	232,57	252,57	272,57	292,57
Pole przekroju słupa	[cm ²]	1600	2000	2400	2800	3200	3600	4000	4400	4800
Pole rdzenia betonowego	[cm ²]	1154,28	1494,28	1834,28	2174,28	2514,28	2854,28	3194,28	3534,28	3874,28
Stożek zbrojenia poprzecznego ρ _T	[%]	0,41428	0,38143	0,35952	0,34388	0,33214	0,32301	0,31571	0,30974	0,30476
a/b ⁻¹	[-]	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
a _c /b _c ⁻¹	[-]	1	1,2941	1,5882	1,8824	2,1765	2,4706	2,7647	3,0588	3,3529
Średnie graniczne naprężenie σ _z (DP)	[MPa]	34,4676	36,7819	38,5858	40,0262	41,2035	42,1822	43,0078	43,7136	44,3246
Średnie graniczne naprężenie σ _z (MC)	[MPa]	30,8950	33,1254	34,8353	36,1923	37,2990	38,2209	38,9710	39,6236	40,1680
Średnie graniczne naprężenie σ _z (WW)	[MPa]	36,3565	38,6588	40,4441	41,8737	43,0409	44,0157	44,8381	45,5422	46,1517
Efektywność skrępowania σ _z /f _{sk} (DP)	[-]	1,1489	1,2261	1,2862	1,3342	1,3735	1,4061	1,4336	1,4571	1,4775
Efektywność skrępowania σ _z /f _{sk} (MC)	[-]	1,0298	1,1042	1,1612	1,2064	1,2433	1,2740	1,2990	1,3208	1,3389
Efektywność skrępowania σ _z /f _{sk} (WW)	[-]	1,2119	1,2886	1,3481	1,3958	1,4347	1,4672	1,4946	1,5181	1,5384



Rysunek 5.21: Naprężenia znormalizowane w funkcji stosunku boków rdzenia, wariant II – stały stopień zbrojenia poprzecznego.

Omówienie rezultatów

Na podstawie zaprezentowanych wyników możemy dokonać kilku interesujących obserwacji:

1. Różne modele dały różniące się wyniki, ale zachowują się według tego samego trendu. Najniższe wartości średnich naprężeń granicznych zaobserwowano dla modelu MC, ale warto zaznaczyć, że ze względu na niejednorodny stan naprężenia wynik taki był oczekiwany (zjawisko zostało omówione w punkcie 5.1).

2. Wraz ze wzrostem stosunku długości boków rdzenia betonowego, przy stałym polu przekroju zbrojenia poprzecznego, efektywność skrępowania wyraźnie maleje, zaś przy zachowaniu stałego stopnia zbrojenia maleje zdecydowanie wolniej, według innej zależności. Warto w tym miejscu przyjrzeć się bliżej powiązaniu pola przekroju zbrojenia poprzecznego A_{sT} i stopnia zbrojenia poprzecznego ρ_T w omawianym przykładzie. W niniejszej pracy, podobnie jak w wielu innych publikacjach, stopień zbrojenia poprzecznego obliczany jest według zasady objętości:

$$\rho_T = \frac{V_{sT}}{V_c}, \quad (5.1)$$

gdzie V_{sT} oznacza objętość zbrojenia poprzecznego, a V_c objętość rozważanego elementu żelbetowego. Wielkości te odniesione są do jednostkowej długości elementu. Jeżeli przyjmiemy oznaczenie A_{sT} jako pole przekroju zbrojenia poprzecznego na jednostkowej dłu-

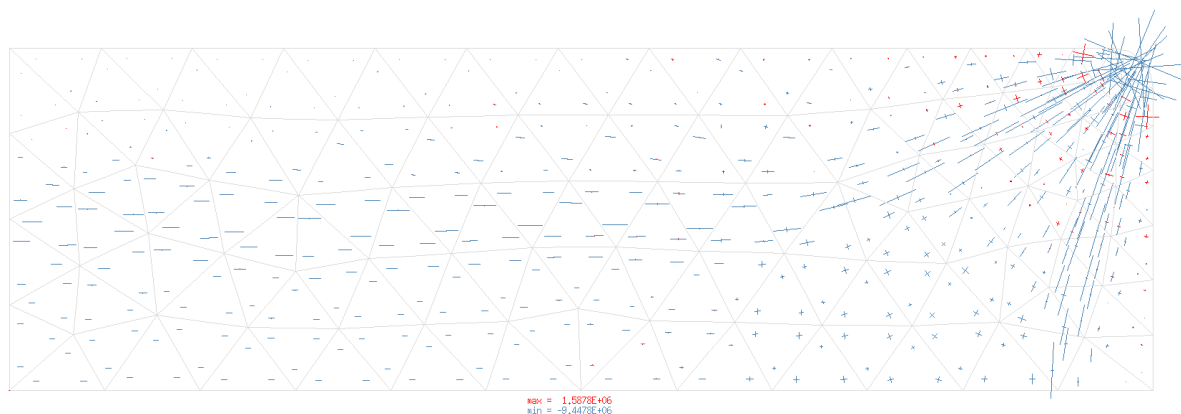
gości (czyli przekrój pojedynczego strzemienia dzielony przez rozstaw prętów) wówczas w przybliżeniu uzyskamy następującą zależność:

$$\rho_T = \frac{A_{sT} L_{sT}}{A_c}, \quad (5.2)$$

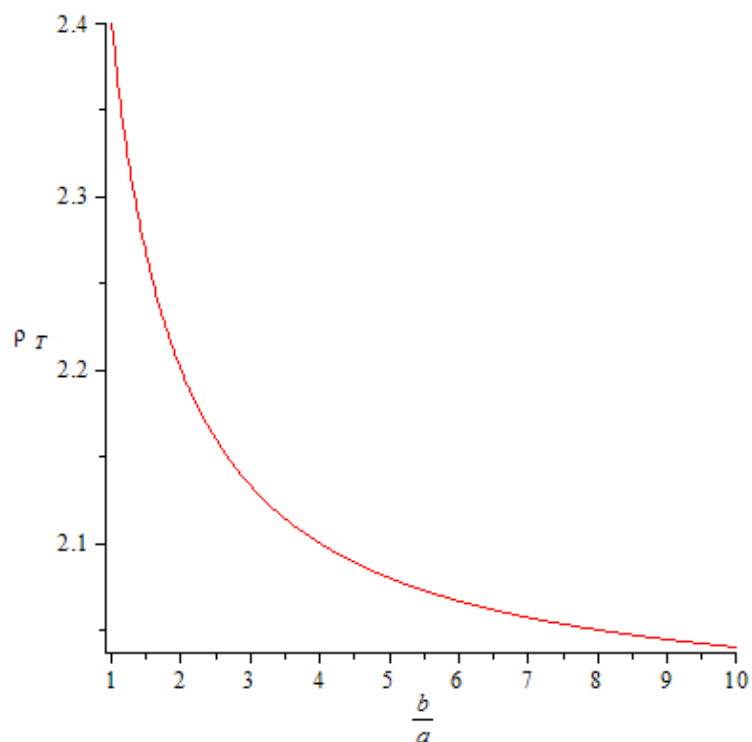
gdzie dodatkowo A_c wyraża pole przekroju elementu żelbetowego, gdy jest on prętem pryzmatycznym, a L_{sT} długość strzemienia. Jeżeli wyrazimy długości boków prostokąta przez a i b , $b > a$, odległość osi zbrojenia od krawędzi zewnętrznej przez c i zaniedbamy zaokrąglenie naroży strzemion wówczas:

$$\begin{aligned} \rho_T &= \frac{A_{sT} [2(a - 2c) + 2(b - 2c)]}{ab} = A_{sT} \frac{2[a + b - 4c]}{ab} \\ &= A_{sT} \frac{2[a + a\frac{b}{a} - 4c]}{a a \frac{b}{a}} = A_{sT} \frac{2[1 + \frac{b}{a} - 4\frac{c}{a}]}{a \frac{b}{a}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Jeżeli stosunek $\frac{b}{a}$ potraktujemy jako argument funkcji, wówczas mamy do czynienia z funkcją wymierną, monotonicznie malejącą w swojej dziedzinie (określonej jako $D = \langle 1, \infty \rangle$) przy $\frac{c}{a} < \frac{1}{4}$ i dążącą do asymptoty poziomej o równaniu $y = \frac{2A_{sT}}{a}$. Przykładowy przebieg przedstawiono na rysunku 5.23. Przeprowadzone rozważanie wskazuje, że zaobserwowana relacja widoczna na wykresach 5.20 jest w pełni uzasadniona. Ponadto można ją uzasadnić rozważając zaobserwowany rozkład naprężeń (rys. 5.22) w prostokątnym przekroju skępowanym.

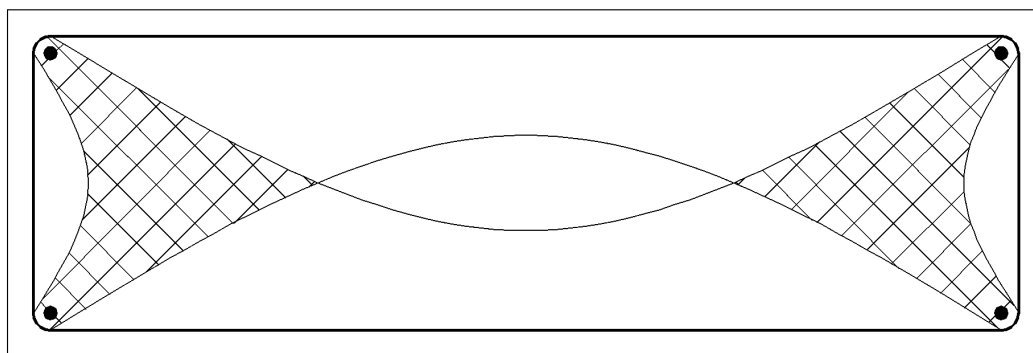


Rysunek 5.22: Rozkład naprężeń poprzecznych w stanie granicznym. Obliczenia z wykorzystaniem modelu Mohra–Coulomba.



Rysunek 5.23: Stopień zbrojenia poprzecznego w funkcji stosunku boków prostokąta. Przyjęto $A_{sT} = 1$; $a = 1$; $c = 0,2a$.

Przedstawiony rysunek 5.24 obrazuje w sposób przybliżony obszar efektywnie skrupowany zbrojeniem poprzecznym. Zachowując stałą wartość stopnia zbrojenia przy wydłużaniu przekroju prostokątnego, relatywnie więcej zbrojenia poprzecznego znajduje się w pobliżu obszaru efektywnie skrupowanego (krótszy bok prostokąta), co z kolei wzmacnia efekt skrupowania w tych obszarach (zakreskowanych na rys. 5.24) na obydwu końcach.



Rysunek 5.24: Schemat efektywnie skrupowanego obszaru przekroju prostokątnego określony wg propozycji Sheikha [111].

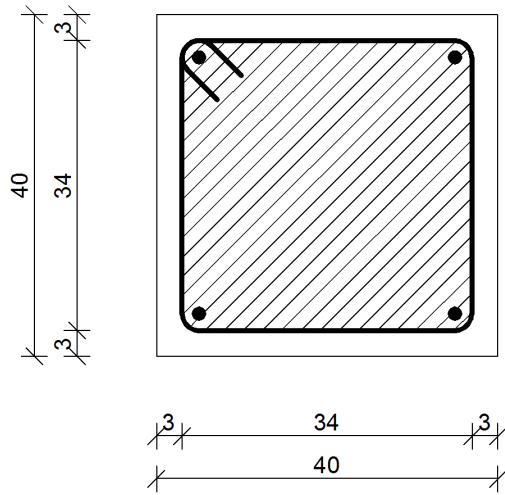
5.4. Przekroje kwadratowe o różnym ukształtowaniu zbrojenia poprzecznego

Opis przykładów obliczeniowych

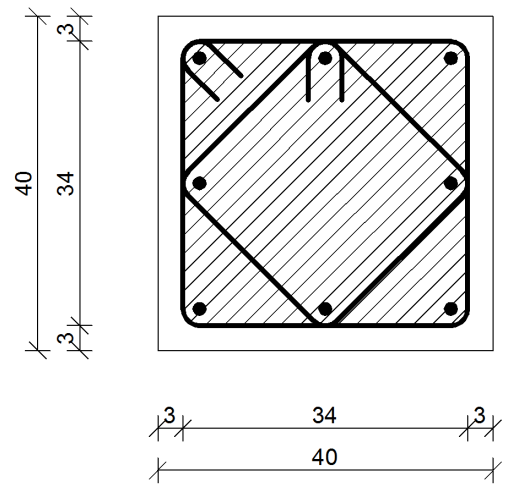
Jednym z czynników wpływających potencjalnie na efektywność skrępowania rdzenia jest sposób ukształtowania zbrojenia poprzecznego. Bezdyskusyjnie najefektywniejsze jest stosowanie okrągłego (osiowosymetrycznego) uzwojenia na kołowym rdzeniu, ale w przypadku słupów o przekroju kwadratowym wskazanie optymalnego rozwiązania jest mniej oczywiste. Wprowadzenie wyłącznie spiralnego zwoju istotnie ogranicza udział rdzenia w całkowitym polu przekroju poprzecznego, z kolei zastosowanie wyłącznie strzemion na obwodzie sprawia, że obszary w pobliżu środków boków są mniej efektywnie skrępowane. W celu znalezienia odpowiedzi na pytanie jak efektywnie wykorzystać zbrojenie poprzeczne do zapewnienia dobrych efektów skrępowania i ostatecznie jak najwyższej nośności przekroju przeanalizowano 11 wariantów zbrojenia kwadratowego przekroju. Częściowo inspirowano się rozwiązaniami przedstawionymi we wcześniej omówionych pracach [128, 127].

By wydzielić wyłącznie wpływ kształtu zbrojenia poprzecznego rozważono modele obliczeniowe reprezentujące przekrój słupów kwadratowych o boku 400 mm, gdzie oś zbrojenia poprzecznego znajduje się w odległości 30 mm od brzegu przekroju. Przy zastosowaniu zbrojenia poprzecznego z prętów $\phi 8$ lub $\phi 10$ pozwala to zapewnić otulinę 25 mm. We wszystkich modelach zastosowano te same materiały: rdzeń o właściwościach odpowiadających betonowi klasy C30/37 określonych według normy [33] oraz pręty zbrojenia poprzecznego odpowiadające stali zbrojeniowej klasy AIII_n o granicy plastyczności $f_y = 500$ MPa. Poszczególne przekroje różnią się polem przekroju zbrojenia poprzecznego prętów uzwojenia w taki sposób, że w każdym przypadku stopień zbrojenia poprzecznego jest równy i ma wartość $\rho_T = 0,5\%$. W przekrojach, w których występowały naroża strzemion (promień zaokrąglenia wyniósł 20 mm) zastosowano zmienną wielkość elementów siatki obliczeniowej o wymiarach od 4 mm do 40 mm ze zwiększonym zagęszczeniem w narożach, przy czym porównano wyniki także z siatkami o stałym wymiarze elementów. Przy pozostałych modelach wykorzystano podział elementami o wymiarach 20 mm.

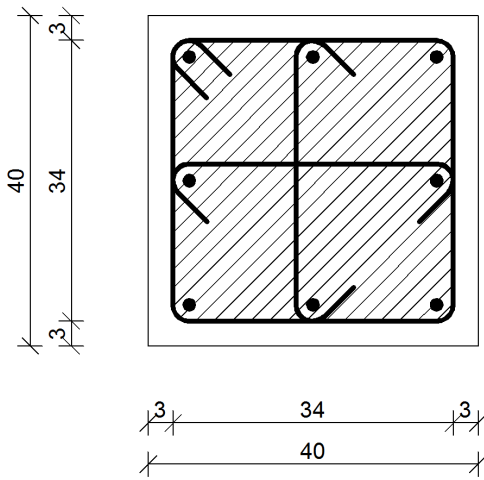
Poniżej przedstawiono rozważane układy zbrojenia poprzecznego (rys. 5.25, 5.26), a dalej siatki, wykorzystane w obliczeniach poszczególnych przykładów (rys. 5.27, 5.28).



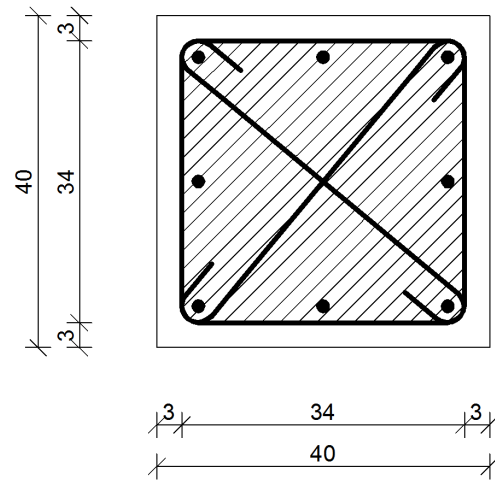
(a) Strzemiona na obwodzie.



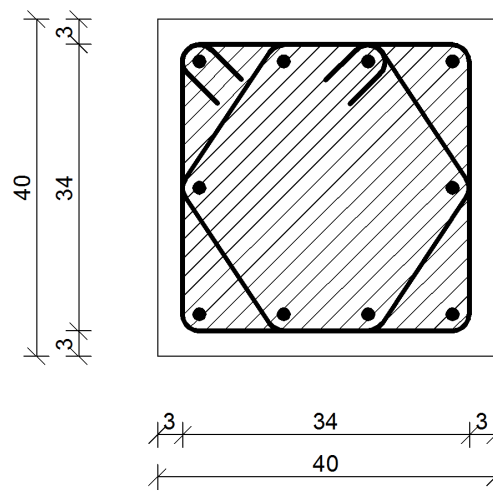
(b) Strzemiona na obwodzie i ułożone diagonalnie.



(c) Strzemiona na obwodzie i szpilki wiążące boki.

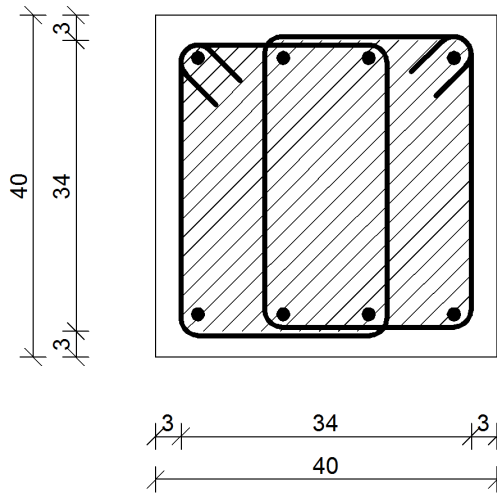


(d) Strzemiona na obwodzie i szpilki na przekątnych.

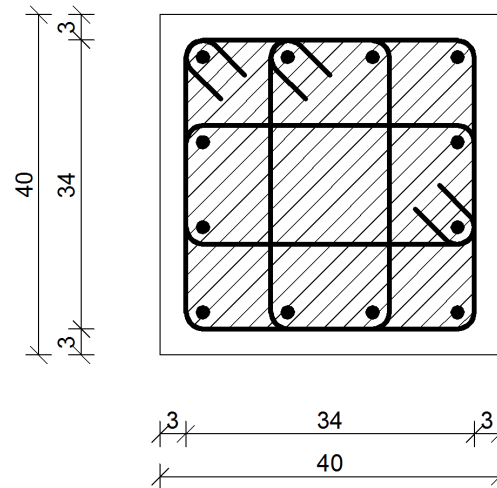


(e) Strzemiona na obwodzie i sześciokątne wewnątrz.

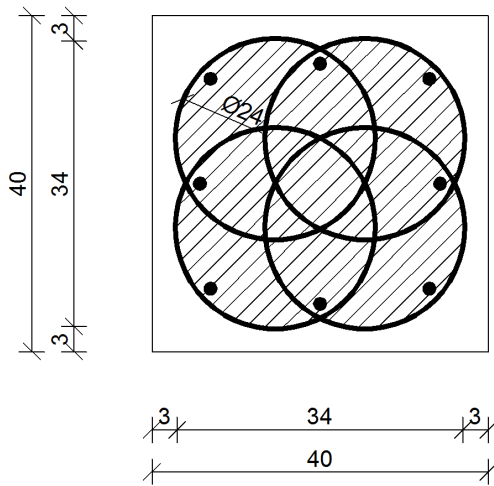
Rysunek 5.25: Przekroje poprzeczne. Analizowano zakreskowany obszar rdzenia.



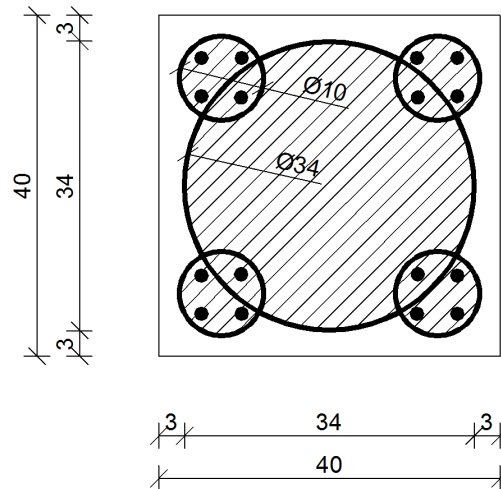
(a) Strzemiona czterokąte w jednym kierunku.



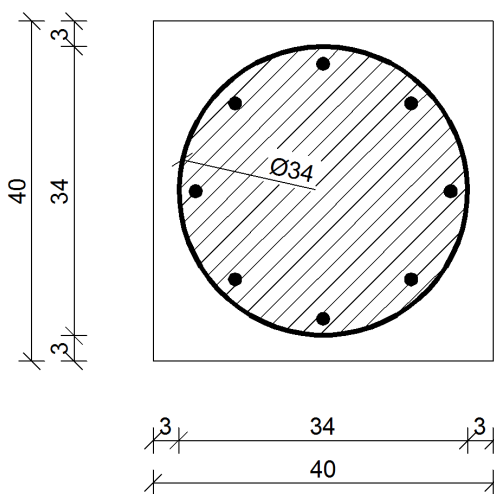
(b) Strzemiona czterokąte w dwóch kierunkach.



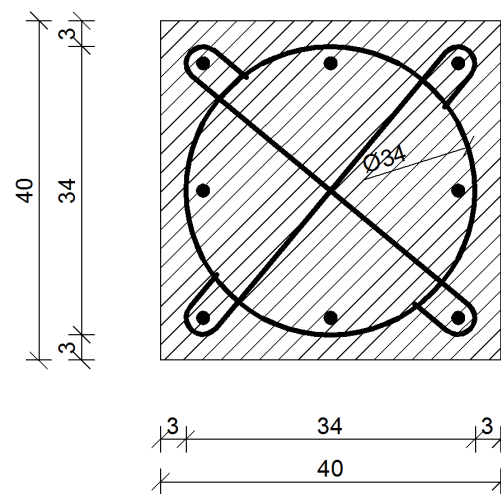
(c) Cztery równo rozsunięte zwoje.



(d) Pięć zwojów, 1 główny i 4 narożne.

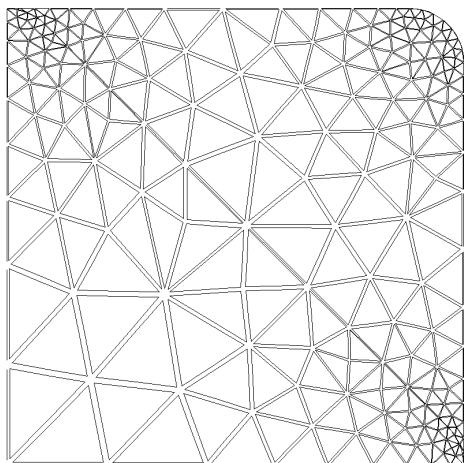


(e) Jeden zwój.

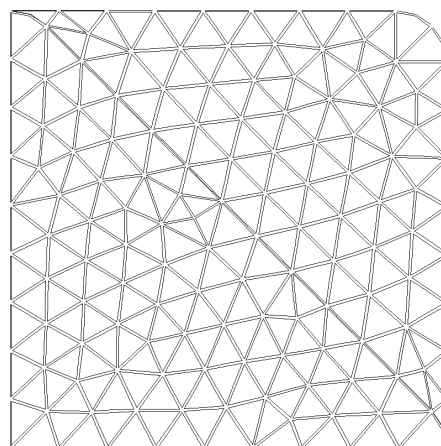


(f) Jeden zwój i szpilki poza obrysem rdzenia. Przekrój poddano dodatkowej prostej analizie ustalania użytecznego obszaru rdzenia.

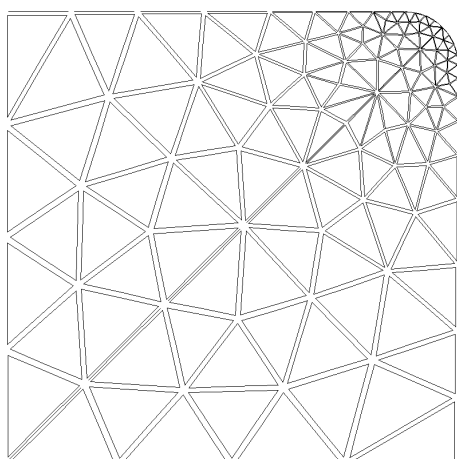
Rysunek 5.26: Przekroje poprzeczne. Analizowano zakreskowany obszar rdzenia.



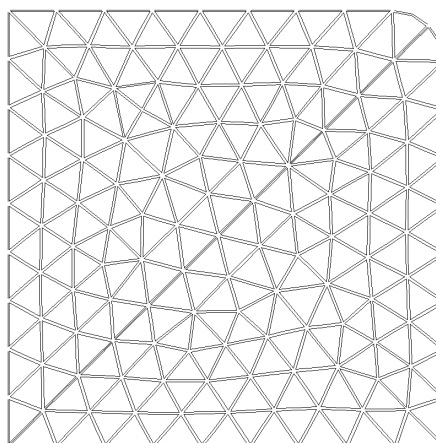
(a) Siatka dla 3 pierwszych modeli z zagęszczeniem siatki w narożach.



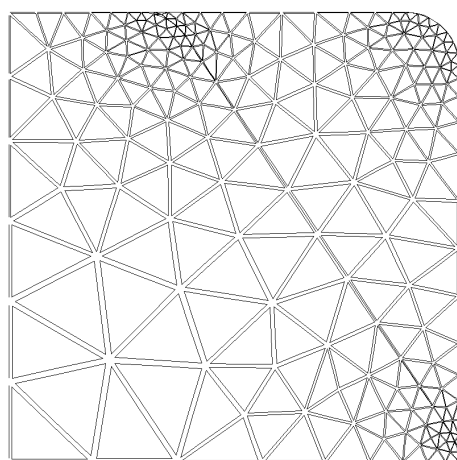
(b) Siatka dla 3 pierwszych modeli o stałym wymiarze elementu.



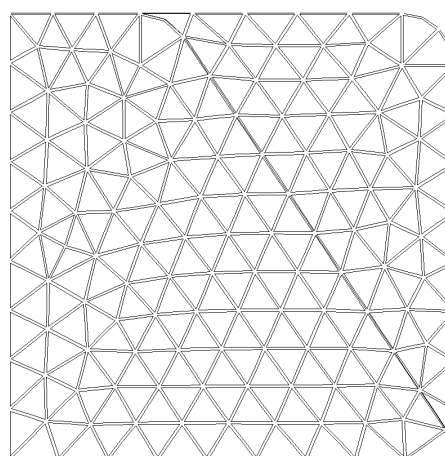
(c) Siatka z zagęszczeniem siatki w narożach dla przypadku z rys. 5.25d.



(d) Siatka o stałym wymiarze elementu dla przypadku z rys. 5.25d.

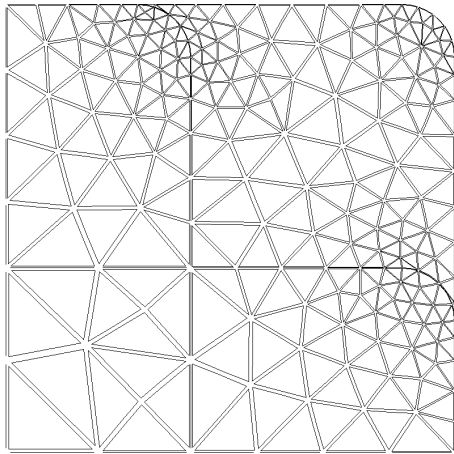


(e) Siatka z zagęszczeniem siatki w narożach dla przypadku z rys. 5.25e.

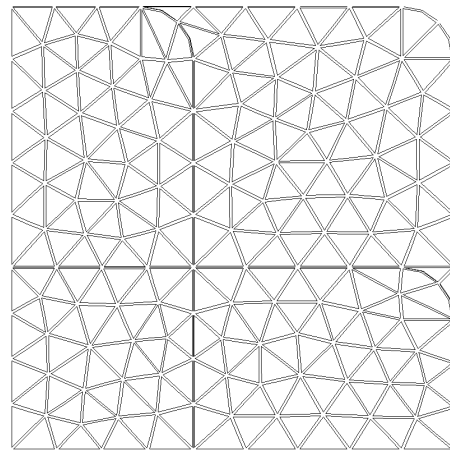


(f) Siatka o stałym podziale dla przypadku z rys. 5.25e.

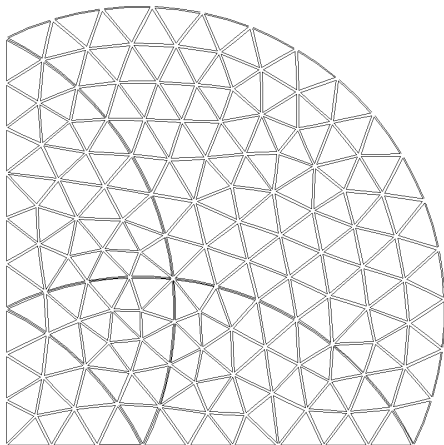
Rysunek 5.27: Zastosowane siatki obliczeniowe.



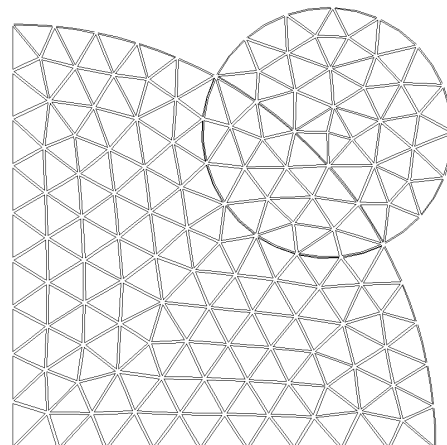
(a) Siatka z zagęszczeniem w narożach dla przypadków z rys. 5.26a, 5.26b.



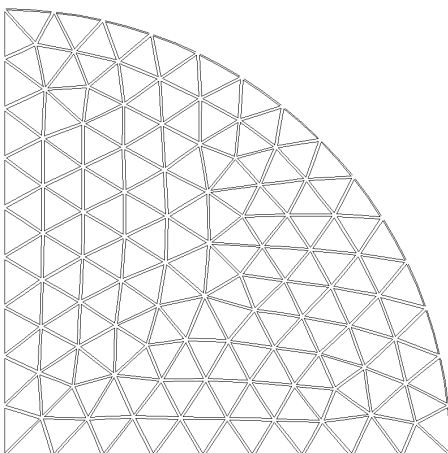
(b) Siatka o stałych wymiarach elementu dla przypadków z rys. 5.26a, 5.26b.



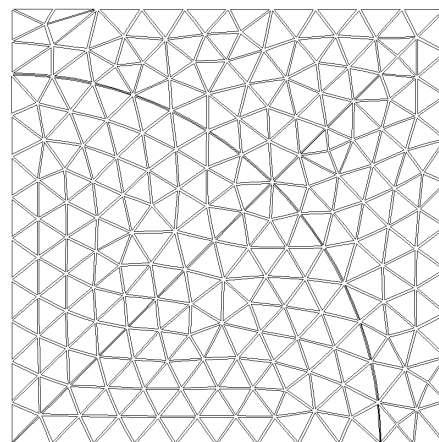
(c) Siatka dla przypadku 4 zwojów.



(d) Siatka dla przypadku 5 zwojów.



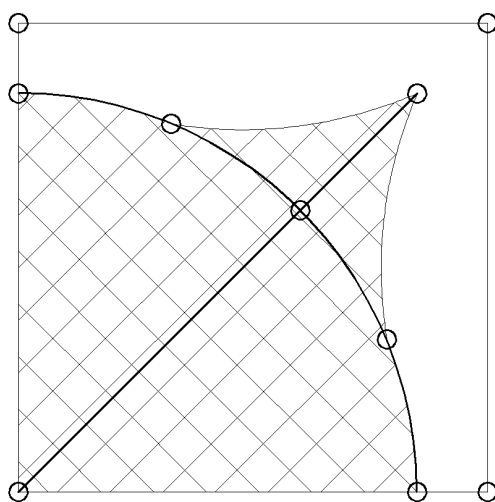
(e) Siatka dla przypadku 1 zwoju.



(f) Siatka dla przypadku 1 zwoju z dozbrojeniem naroży.

Rysunek 5.28: Zastosowane siatki obliczeniowe.

Ocena nośności i efektywności skrupowania ostatniego z prezentowanych przekrojów okazała się najbardziej problematyczna. Dzieje się tak, ponieważ rdzeń objęty zwojem jest rozszerzony przez zbrojenie liniowe wychodzące poza jego obrys, które dodatkowo podtrzymuje część przekroju betonowego znajdującego się na zewnątrz głównego uzwojenia. Aby ocenić, jaki obszar ulegnie odspojeniu przeanalizowano wartości naprężeń głównych w punktach całkowania numerycznego i porównano je z wytrzymałością betonu na rozciąganie. W tym celu w pierwszej kolejności odczytano wyniki naprężeń w punktach Hammera po ostatnim kroku obliczeniowym. Następnie na szkicu przekroju, na którym oznaczono położenie punktów całkowania numerycznego, wytyczono izolinię odpowiadającą wytrzymałości betonu na rozciąganie (przewidywane miejsce odspojenia). Kolejno odczytano wyniki z wcześniejszych kroków obliczeniowych i sprawdzano, czy na wcześniejszym etapie obliczeń nie osiągnięto granicy wytrzymałości na rozciąganie w betonie w obszarze między wyznaczoną izolinią, a rdzeniem zamkniętym przez zbrojenie poprzeczne. W razie potrzeby dokonywano korekty położenia izolunii. Odwrócona kolejność sprawdzenia pozwoliła uzyskać poszukiwany obrys niższym nakładem pracy, przy mniejszej liczbie korekt. Od końcowego wyniku odjęto siłę osiową przypadającą na obszar ulegający odspojeniu. To rozwiązanie nie ozdzwierciedla w pełni efektu odrzucenia otuliny, gdyż nie eliminuje wpływu naprężeń rozciągających na krawędzi rdzenia i w związku z tym prowadzi do pewnego niedoszacowania wartości siły osiowej. Za rdzeń przy dalszych porównaniach z innymi przekrojami przyjęto całą powierzchnię pozostałego przekroju betonowego (rys. 5.29). Podejście to miało na celu umożliwić oszacowanie siły osiowej w rdzeniu bez konieczności przebudowywania modelu i powtarzania obliczeń.



Rysunek 5.29: Rozszerzony rdzeń przekroju ze zbrojeniem zwojem i szpilkami w narożach.

Efektywność zastosowanego zbrojenia porównano w następujących aspektach:

1. średnie naprężenie normalne w stanie granicznym w obszarze rdzenia,

2. siła osiowa przenoszona przez rdzeń w stanie granicznym (uwzględnia pole powierzchni rdzenia, które jest różne w różnych przypadkach),

3. całkowita siła osiowa w przekroju betonowym przed odspojeniem otuliny (obrazuje efektywność zastosowanego zbrojenia poprzecznego przy obciążeniach użytkowych).

Omówienie wyników – siła osiowa

W tabeli 5.3 zestawiono wyniki uzyskane przy wykorzystaniu modelu Druckera-Pragera, który dał średnie wyniki spośród zastosowanych modeli materiałowych. Fenomen ten występował we wcześniej prezentowanych wynikach i został wcześniej omówiony. W kolejnych tabelach przedstawiono wyniki dla pozostałych dwóch modeli materiałowych. Niezależnie od przyjętego modelu materiałowego uzyskano takie samo lub zbliżone (w przypadku niewiele różniących się rezultatów dla przekrojów z 4 i 5 zwojami występuje odwrócenie kolejności) uszeregowanie przekrojów od najefektywniejszego do najmniej efektywnego. Jednakże widoczne były różnice wartości otrzymywane przy różnych modelach z zachowaniem następujących relacji:

1. najwyższe wartości uśrednionych naprężeń normalnych w rdzeniu uzyskiwano przy obliczeniach z wykorzystaniem modelu WW, przy czym w przypadkach mniej efektywnych sposobów zbrojenia wartości te były zbliżone do modelu DP,

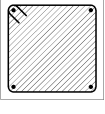
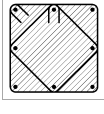
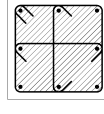
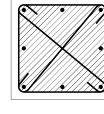
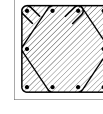
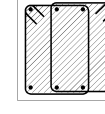
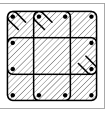
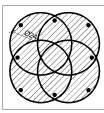
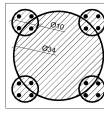
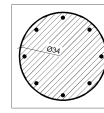
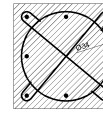
2. w przypadku stosowania zbrojenia w postaci wyłącznie okrągłych zwojów różnice względne między modelami DP i MC nie przekraczały 1%,

3. obliczenia z wykorzystaniem modelu MC dawały najniższe wartości uśrednionych naprężeń normalnych, przy czym różnice w stosunku do DP powiększały się im mniej efektywny był dany sposób kształtowania zbrojenia poprzecznego. Dla najmniej wydajnego sposobu (zwoj ze szpilkami) w obliczeniach z modelem MC dla betonu odnotowano około 3-krotnie niższy przyrost nośności niż określony przy użyciu modeli DP i WW.

Ostatni punkt można wyjaśnić wyraźnie innym kierunkiem przyrostu odkształceń plastycznych o czym wspomniano w punkcie 5.2 i na rys. 5.19. Różnice wynikające ze stosowania różnych siatek obliczeniowych dla odpowiednich przykładów prowadziły do uzyskania różnic w wynikach na poziomie maksymalnie 0,013% w przypadku przekroju z strzemionami wyłącznie na obwodzie, w pozostałych przypadkach przyjmując wartości poniżej 0,01% co można uznać za wartość pomijalnie małą.

Opierając się na przedstawionych wynikach możemy zauważyć, że najwyższe wartości średnich naprężeń osiowych w rdzeniu występują w przekrojach zbrojonych zwojami. Zgodnie z oczekiwaniem najefektywniejszy pod tym względem jest kształt pojedynczego zwoju, który zapewnia jednorodny stan naprężenia wewnątrz rdzenia. Jednakże zastosowanie tego rozwiązania do zbrojenia przekrojów kwadratowych nie jest zbyt racjonalne ze względu na najniższy udział rdzenia w całkowitej powierzchni przekroju poprzecznego spośród wszystkich zaproponowanych w tym porównaniu przekrojów. Pewną próbą ograniczenia tej niedogodności jest propozycja zastosowania 4 mniejszych, rozsuniętych zwo-

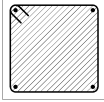
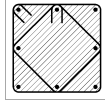
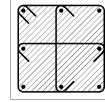
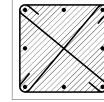
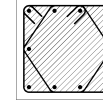
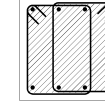
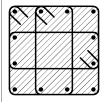
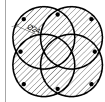
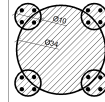
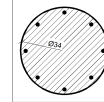
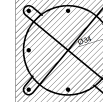
Tablica 5.3: Syntetyczne wyniki obliczeń – model Druckera–Pragera.

							
Pole rdzenia	[cm ²]	1153	1153	1153	1153	1153	1153
Naprężenia w rdzeniu	[MPa]	36,84	36,95	36,92	36,82	36,95	36,88
Siła osiowa w rdzeniu	[MN]	4,248	4,260	4,257	4,245	4,260	4,252
Siła całkowita z otuliną	[MN]	5,589	5,601	5,598	5,586	5,601	5,593
							
Pole rdzenia	[cm ²]	1153	1064	1109	908	1032	
Naprężenia w rdzeniu	[MPa]	36,96	37,67	37,30	38,90	37,52	
Siła osiowa w rdzeniu	[MN]	4,261	4,008	4,137	3,532	3,872	
Siła całkowita z otuliną	[MN]	5,602	5,616	5,610	5,608	5,576	

jów lub dodanie mniejszych obejmujących naroża, albo wyprowadzenie innego zbrojenia w kierunku naroży. Efektywność skrępowania rdzenia jest wówczas o około 3 ÷ 4 % niższa, ale wzrost udziału rdzenia w powierzchni przekroju wynosi 13 ÷ 22 %, co w rezultacie prowadzi do wzrostu siły osiowej w rdzeniu w stanie granicznym na poziomie 9 ÷ 17 %. Kolejną grupą przekrojów pod względem efektywności skrępowania rdzenia są profile zbrojone strzemieniem na obwodzie oraz dodatkowo zbrojeniem poprzecznym zapewniającym podtrzymanie boków przekroju. Efektywność skrępowania rdzenia jest niższa od pojedynczego zwoju o około 5 %, ale rdzeń obejmuje obszar o prawie 27 % większy niż we wspomnianym przypadku odniesienia. W tej grupie uzyskiwano najwyższe wartości siły osiowej w rdzeniu w stanie granicznym (o około 20 % wyższe niż przypadku przekroju z pojedynczym zwojem). Ostatnia grupa to przekroje wyróżniające najsilniejszym skrępowaniem naroży przekroju. Są to: przekrój zbrojony wyłącznie prostymi strzemionami oraz kombinacją strzemion z poprowadzonymi wzdłuż przekątnej dodatkowymi prętami. Ten sposób najmniej efektywnie krępuje rdzeń (około 5,3 % gorzej niż pojedynczy zwój), ale podobnie jak poprzednia grupa obejmuje możliwie największy obszar.

Zestawienie siły w przekroju betonowym pracującym w fazie przed odspojeniem otuliny zbrojenia pozwala stwierdzić, że najwyższe wartości siły osiowej tuż przed zniszcze-

Tablica 5.4: Syntetyczne wyniki obliczeń – model Mohra–Coulomba.

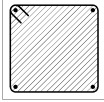
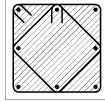
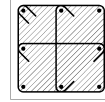
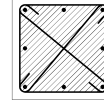
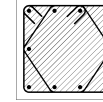
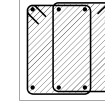
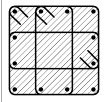
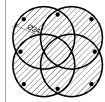
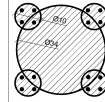
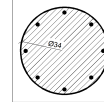
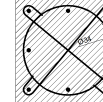
							
Pole rdzenia	[cm ²]	1153	1153	1153	1153	1153	1153
Naprężenia w rdzeniu	[MPa]	32,39	34,33	34,18	32,18	34,45	33,06
Siła osiowa w rdzeniu	[MN]	3,735	3,958	3,941	3,710	3,972	3,812
Siła całkowita z otuliną	[MN]	5,076	5,299	5,282	5,051	5,313	5,153
							
Pole rdzenia	[cm ²]	1153	1064	1109	908	1032	
Naprężenia w rdzeniu	[MPa]	34,73	37,32	37,29	38,90	31,77	
Siła osiowa w rdzeniu	[MN]	4,004	3,971	4,135	3,532	3,278	
Siła całkowita z otuliną	[MN]	5,345	5,579	5,608	5,608	4,982	

niem mogą wystąpić w przekrojach zbrojonych 4 lub 5 zwojami, ale najwyższą nośność w stanie granicznym przedstawiają przekroje zbrojone strzemionami z uzupełniającym zbrojeniem podtrzymującym boki przekroju (przedstawione na rys. 5.25b, 5.25c, 5.25e, 5.26b). Jednakże ta symulacja nie uwzględnia zakotwienia prętów, zakładając ich ciągłość na obwodzie. By uzyskać podobne efekty w warunkach wykonawczych konieczne mogłoby okazać się dodanie znacznych długości zakotwień, które zauważalnie wpłynęłyby na stopień zbrojenia poprzecznego. Problem taki nie występuje przy stosowaniu zbrojenia okrągłym zwojem w kształcie helisy.

Omówienie wyników – obszar efektywnie skrępowany

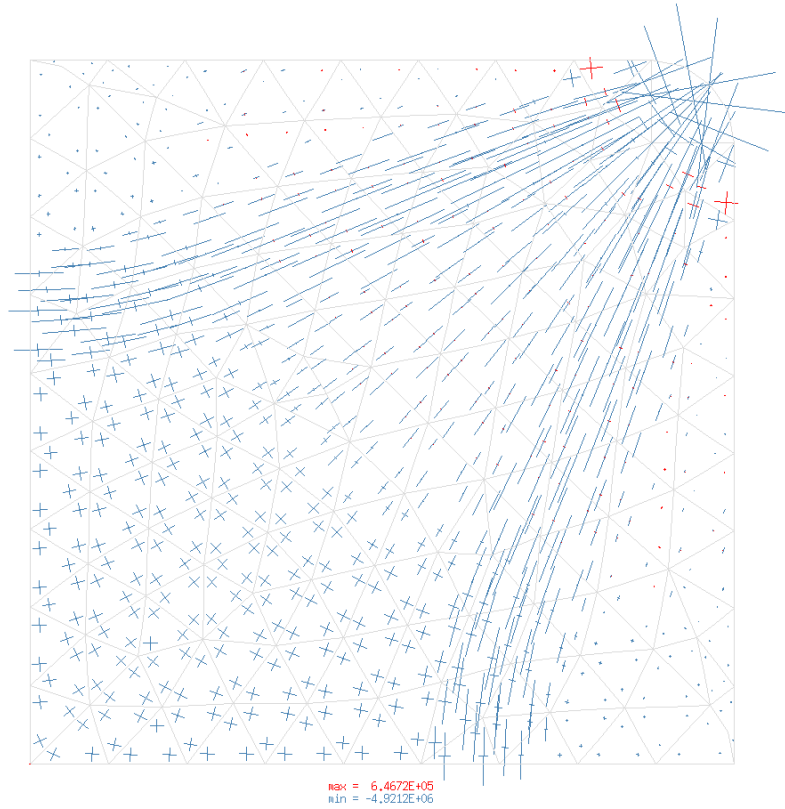
Jedną z koncepcji uproszczonego opisu zjawiska skrępowania jest posługiwanie się koncepcją obszaru efektywnie skrępowanego [111, 108, 112]. Zamyśl ten dobrze koresponduje z rezultatami otrzymanymi przy wykorzystaniu modelu MC do opisu zachowania betonu. W przypadku stosowania zbrojenia w postaci strzemion obserwuje się w stanie granicznym pojawienie się stref znacznie różniących się wartościami i kierunkiem naprę-

Tablica 5.5: Syntetyczne wyniki obliczeń – model Willama–Warnkego.

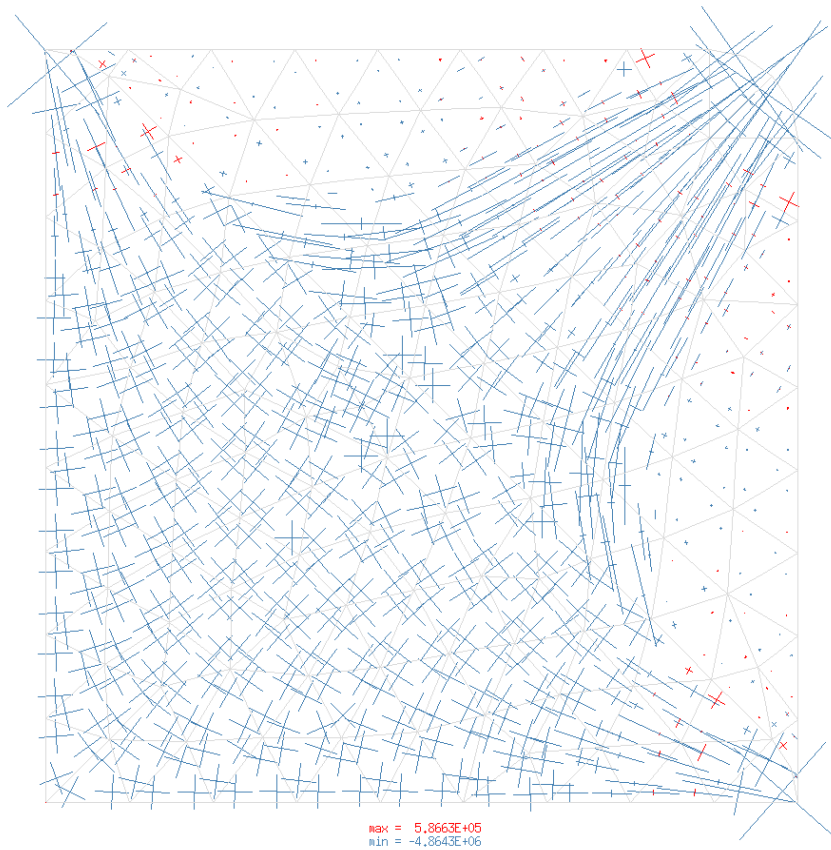
							
Pole rdzenia	[cm ²]	1153	1153	1153	1153	1153	1153
Naprężenia w rdzeniu	[MPa]	38,98	40,00	39,81	38,86	40,10	39,51
Siła osiowa w rdzeniu	[MN]	4,494	4,612	4,590	4,481	4,624	4,556
Siła całkowita z otuliną	[MN]	5,835	5,953	5,931	5,822	5,964	5,897
							
Pole rdzenia	[cm ²]	1153	1064	1109	908	1032	
Naprężenia w rdzeniu	[MPa]	40,20	41,59	41,22	43,82	39,5	
Siła osiowa w rdzeniu	[MN]	4,635	4,425	4,571	3,979	4,080	
Siła całkowita z otuliną	[MN]	5,976	6,033	6,044	6,055	5,784	

zeń, co widać na planach warstwicznych naprężeń, rys. od 5.30 do 5.35. Część przekroju efektywnie skrępowana charakteryzuje się naprężeniami poprzecznymi o zbliżonych wartościach, w rozwiązywanych zadaniach zwykle około rząd niższe niż naprężenia osiowe (ich dokładna wielkość zależy od wielu czynników takich jak kształt i stopień zbrojenia poprzecznego, dane materiałowe). Kolejny wyraźnie zarysowany obszar to strefy wzdłuż prostych krawędzi strzemion, gdzie naprężenia poprzeczne (krępujące) osiągają wartości 1–2 rzędy niższe niż wartości we wcześniej wspomnianej części przekroju poprzecznego. Pomiedzy nimi widoczny jest obszar o zdecydowanie większym gradiencie naprężeń poprzecznych. Dokładniejsza analiza pozwoliła odkryć, że w niektórych przypadkach w tej strefie mogą pojawić się naprężenia rozciągające o wartości wytrzymałości na rozciąganie, które następnie przy dalszym ściskaniu przekroju ulegają redukcji przez pęczniący rdzeń.

W przypadkach przekrojów zbrojonych zwojami zaobserwowano w przybliżeniu stałe wartości naprężeń poprzecznych w poszczególnych podobszarach oraz skokową zmianę między tymi częściami przekroju. Wartości średnich naprężeń krępujących wykazują korelację z lokalnym stopniem zbrojenia poprzecznego, czyli stosunkiem zbrojenia poprzecznego okalającego dany podobszar do jego powierzchni.

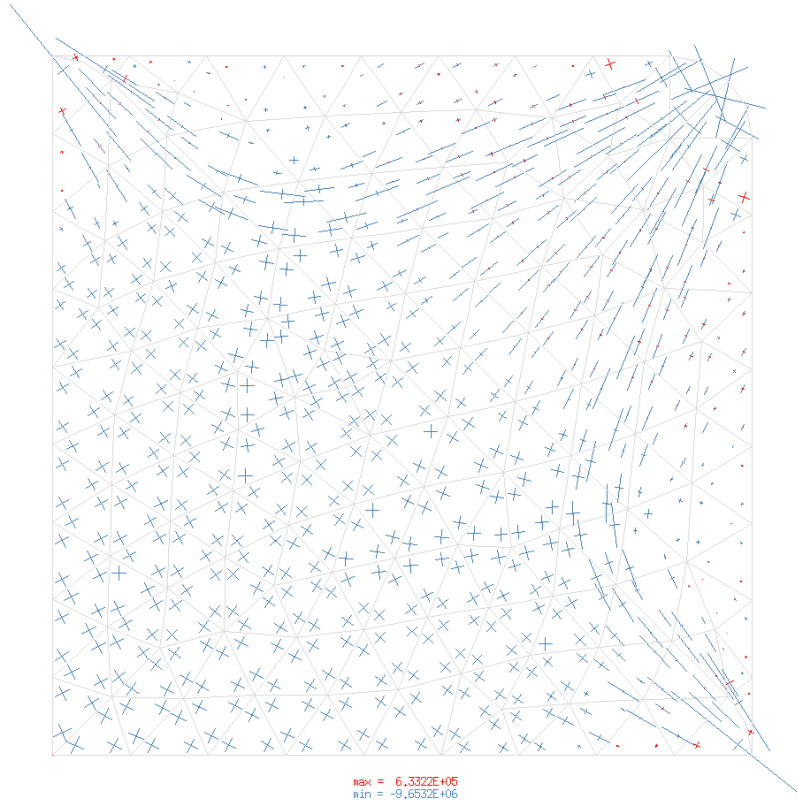


(a) Strzemiona na obwodzie.

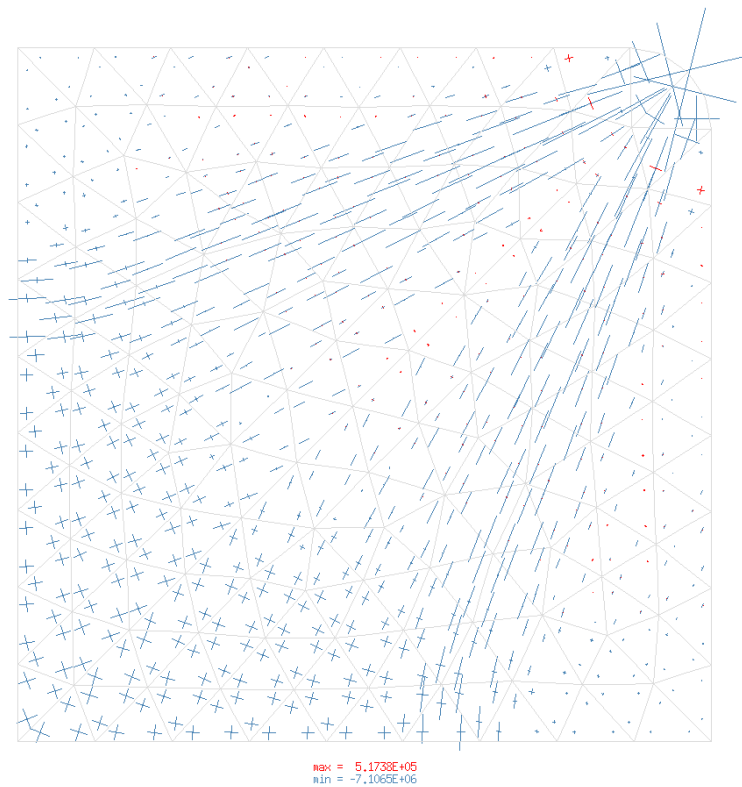


(b) Strzemiona na obwodzie i ułożone diagonalnie.

Rysunek 5.30: Naprężenia główne. Stan pełnego uplastycznienia rdzenia, skrócenie podłużne $\varepsilon_z = 2\%$, model MC.

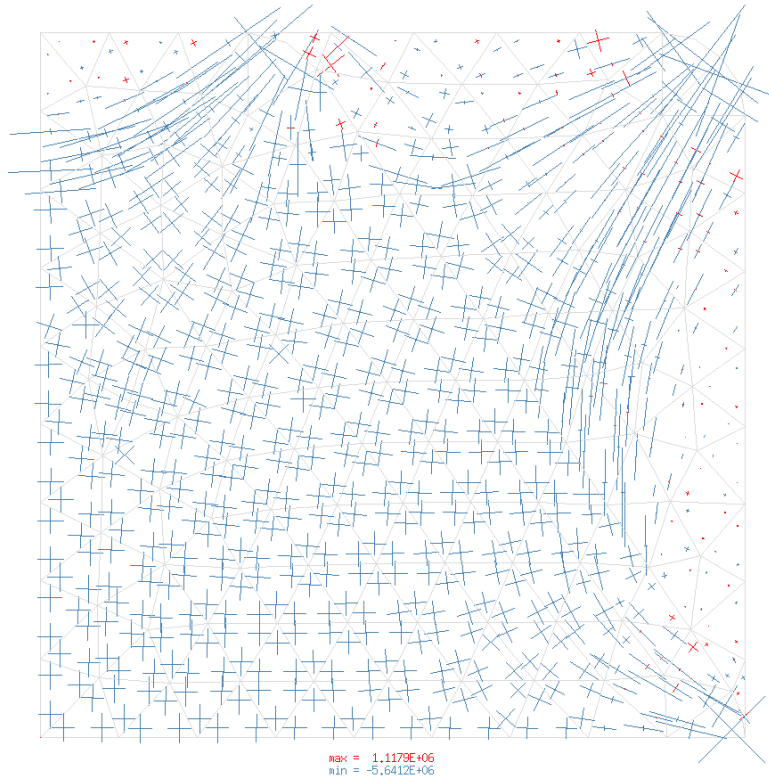


(a) Strzemiona na obwodzie i szpilki na bokach.

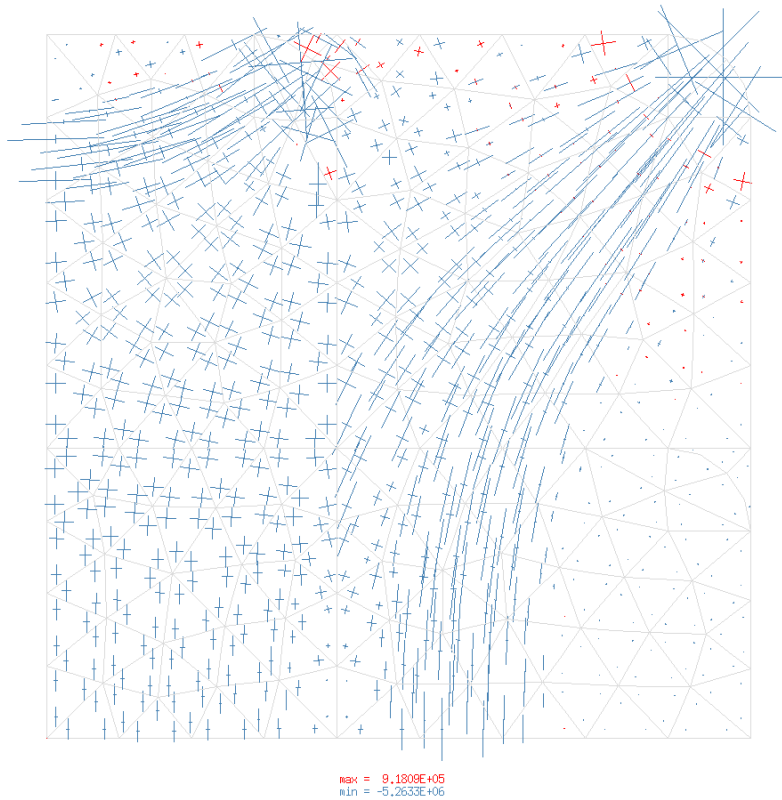


(b) Strzemiona na obwodzie i szpilki w narożach.

Rysunek 5.31: Naprężenia główne. Stan pełnego uplastycznienia rdzenia, skrócenie podłużne $\varepsilon_z = 2\%$, model MC.

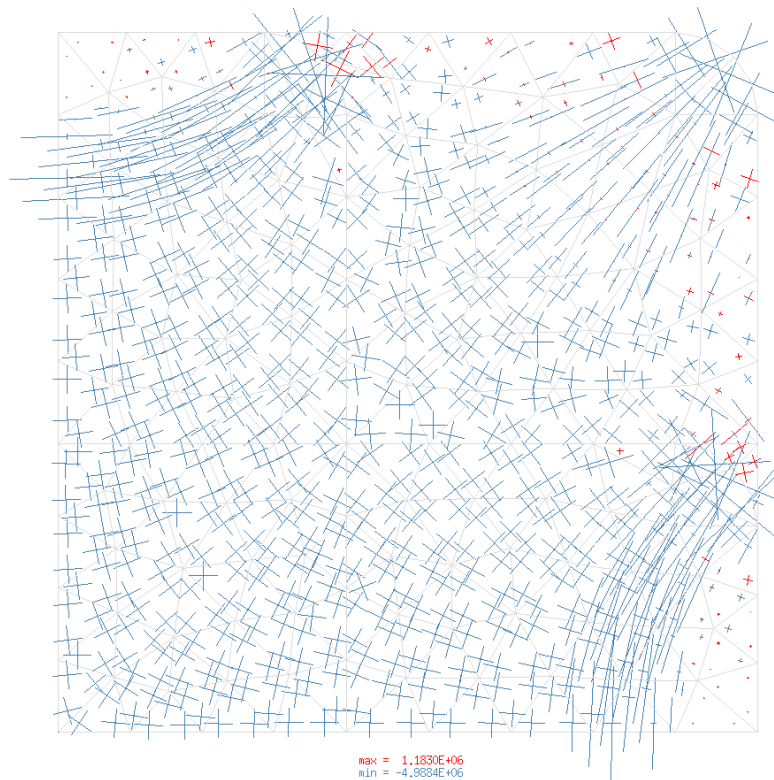


(a) Strzemiona na obwodzie i sześciokątne wewnątrz.

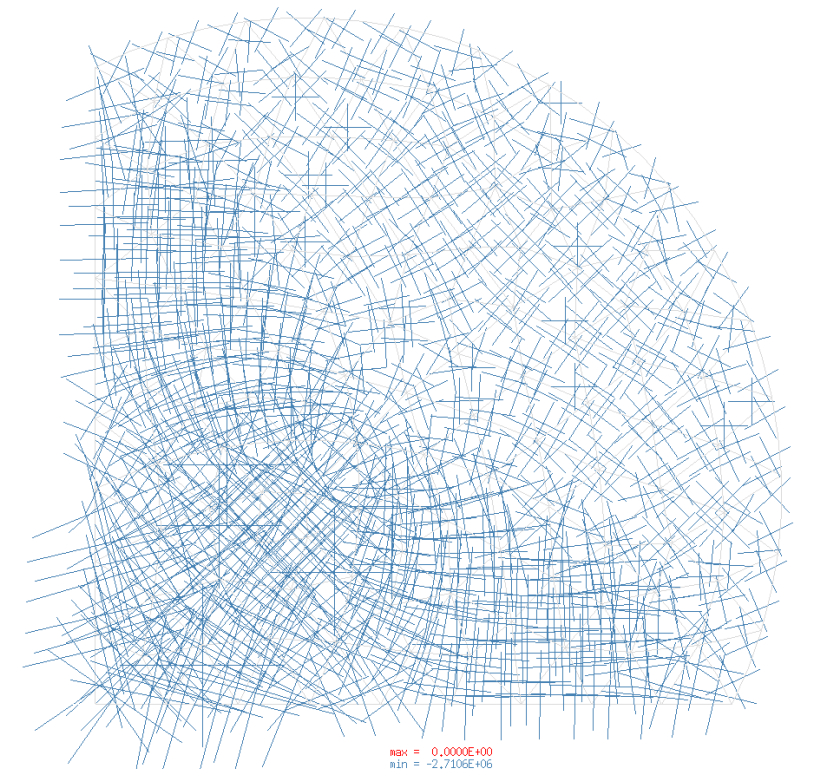


(b) Strzemiona czterocięte w jednym kierunku.

Rysunek 5.32: Naprężenia główne. Stan pełnego uplastycznienia rdzenia, skrócenie podłużne $\varepsilon_z = 2\%$, model MC.

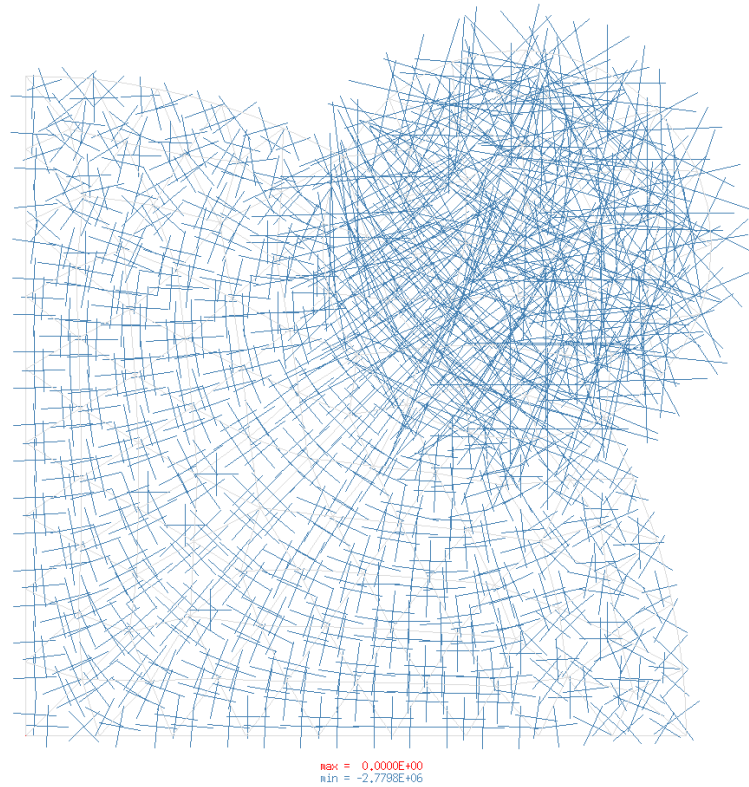


(a) Strzemiona czterocięte w dwóch kierunkach.

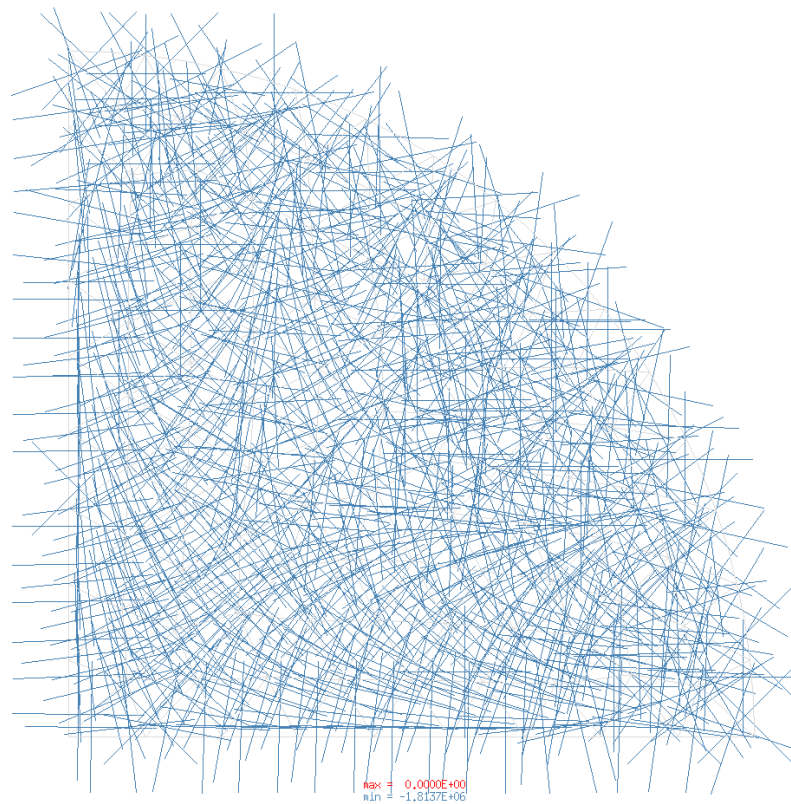


(b) Cztery równo rozsunięte zwoje.

Rysunek 5.33: Naprężenia główne. Stan pełnego uplastycznienia rdzenia, skrócenie podłużne $\varepsilon_z = 2\%$, model MC.

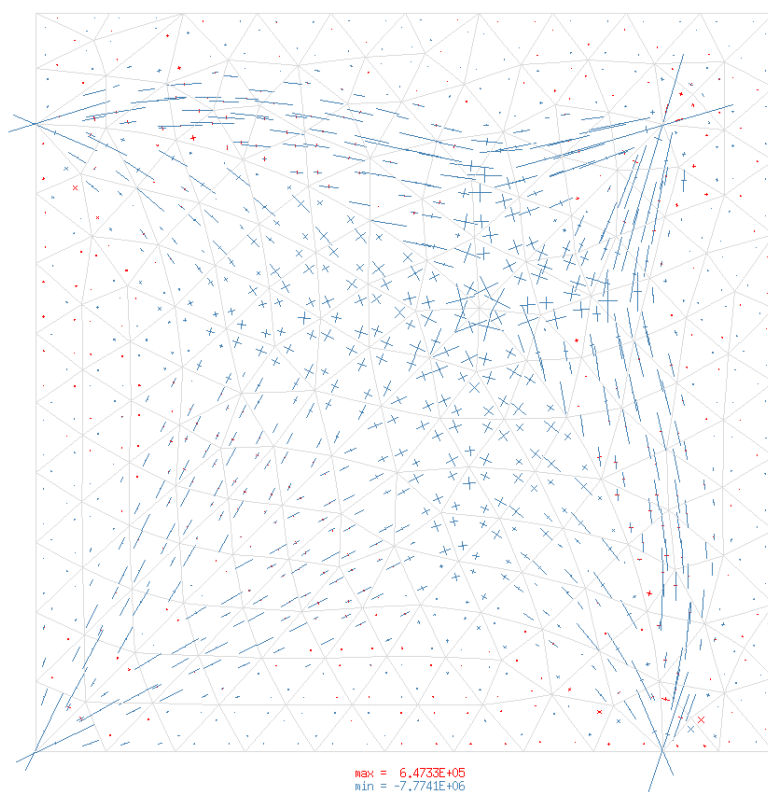


(a) Pięć zwojów, 1 główny i 4 narożne.



(b) Jeden zwoj.

Rysunek 5.34: Naprężenia główne. Stan pełnego uplastycznienia rdzenia, skrócenie podłużne $\varepsilon_z = 2\%$, model MC.



(a) Jeden zwój i szpilki poza obwodem rdzenia.

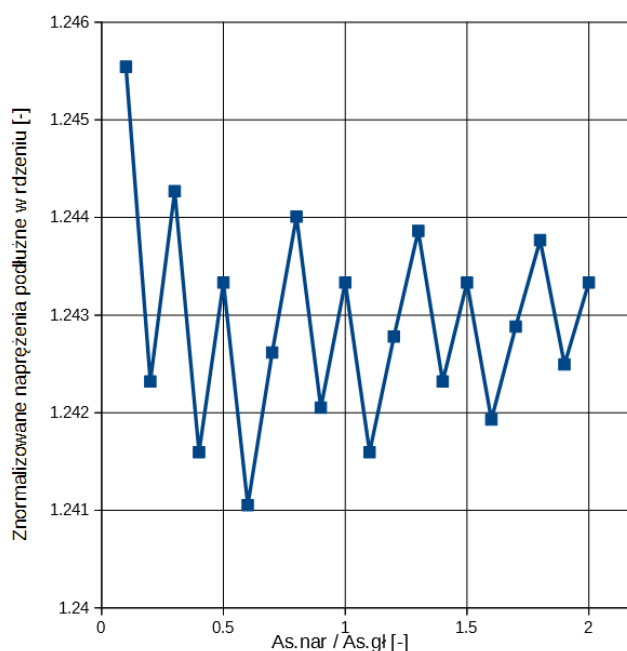
Rysunek 5.35: Naprężenia główne. Stan pełnego uplastycznienia rdzenia, skrócenie podłużne $\varepsilon_z = 2\%$, model MC.

Należy zaznaczyć, że przeprowadzone symulacje wskazały, że przy kształtowaniu zbrojenia poprzecznego istotne jest możliwie pełne objęcie przekroju, które pozwoli uzyskać jak największy rdzeń. Samo poprowadzenie zbrojenia poprzecznego przy zachowaniu tego samego stopnia zbrojenia okazało się mniej istotnym czynnikiem, którego wpływ na końcową nośność jest rzędu $\pm 5\%$. Najefektywniejszą drogą jest zmniejszanie stref słabo skrępowanych, co można uzyskać stosując uzwojenie okrągłymi zwojami lub przez skracanie odcinków podtrzymanych przez poprzecznie dochodzące pręty. Spostrzeżenia te są zgodne z obserwacjami badań prezentowanych w rozdziale drugim lecz można zaznaczyć, że w nielicznych pracach pojawiało się porównanie większej liczby kształtów zbrojenia poprzecznego niż 3–4 (zwykle przekrój kołowy ze zbrojeniem kołowym jako punkt odniesienia, strzemiona na obwodzie w przekroju kwadratowym i pojedyncze dodatkowe przekroje).

Badanie wpływu podziału zbrojenia poprzecznego między zwoje w przypadku przekroju kwadratowego z 5 zwojami (rys. 5.26d)

Seria objęła łącznie 20 przykładów o identycznym kształcie i stałych materiałowych, które różniły się polem przekroju prętów tworzących cztery zwoje narożne oraz je-

den główny w zakresie od 1:10 do 2:1. Łączny udział zbrojenia poprzecznego we wszystkich przeprowadzonych symulacjach odpowiadał stopniowi zbrojenia poprzecznego $\rho_T = 0,5\%$. Wyniki przedstawiono na wykresie (rys. 5.36) w postaci znormalizowanego naprężenia wewnątrz rdzenia przekroju w funkcji stosunku pola przekroju pręta zwojów zewnętrznych do pola przekroju pręta zwoju wewnętrznego.



Rysunek 5.36: Znormalizowane naprężenia w rdzeniu w stanie granicznym, w funkcji stosunku pola przekroju pręta zwojów narożnych do pola przekroju pręta zwoju głównego, $\rho_T = 0,5\%$, model DP.

Przeprowadzona seria obliczeń wykazała małe zróżnicowanie (około 1,9% przyrostu nośności rdzenia) pomiędzy poszczególnymi wynikami bez wyraźnej i monotonicznej zależności między tymi wielkościami. Charakter zmienności oraz jej rząd wskazują na numeryczne źródło różnic, wynikające chociażby z zaokrąglenia pola powierzchni prętów do 3 cyfr znaczących i możliwe niewielkie odchyłki od założonego stopnia zbrojenia poprzecznego.

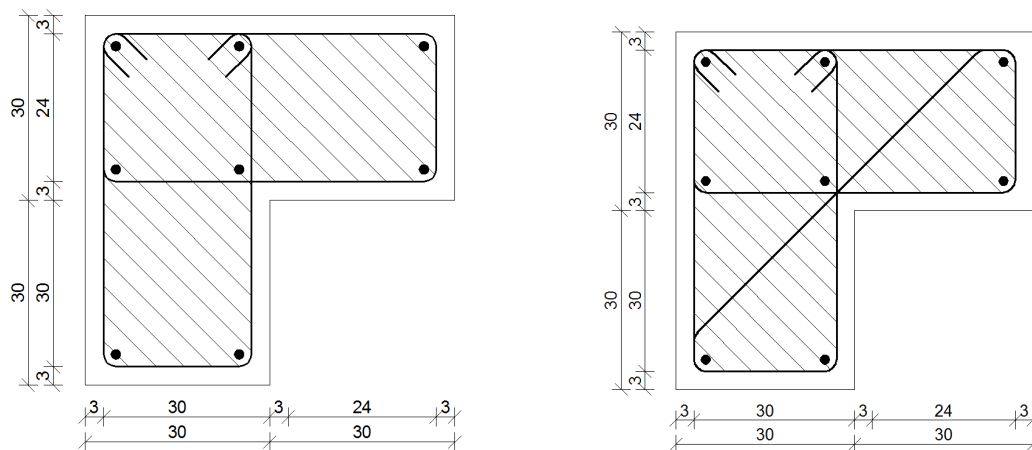
5.5. Przekroje o nietypowym kształcie

Uzwojenie przekroju wklęsłego na przykładzie przekroju w kształcie „L”

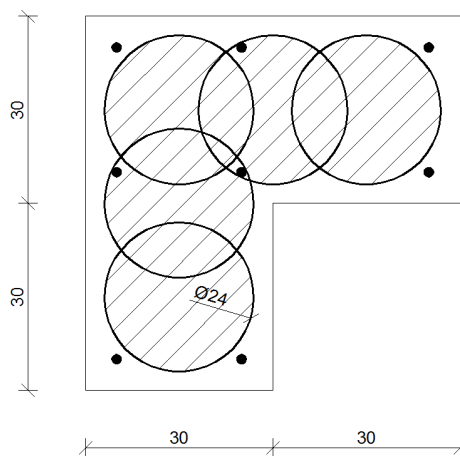
Przedstawiony poniżej przykład prezentuje porównanie skuteczności uzwojenia przekroju wklęsłego (przekrój kwadratowy o boku 60 cm z wyciętym w jednym narożu kwadratem o boku 30 cm) trzema rodzajami zbrojenia poprzecznego (rys. 5.37) – pierw-

sze wykonane z strzemion prostokątnych na obwodzie, drugie podobne z dodanym prętem łączącym dwa ramiona przekroju (zwane dalej zbrojeniem zszywającym), oraz trzecie wykonane z pięciu okrągłych zwojów. Wykorzystano w tym celu zaprezentowany w pracy model obliczeniowy w trzech wariantach w zakresie opisu zachowania rdzenia betonowego. We wszystkich przeprowadzonych symulacjach wykorzystano dane materiałowe mające odpowiadać tym samym materiałom. Dla stali zbrojenia poprzecznego są to granica plastyczności $f_y = 500$ MPa oraz moduł Younga $E_s = 200$ GPa. Stałe materiałowe dla betonu przyjęto tak jak w większości serii: $E_c = 32$ GPa, stała Poissona $\nu = 0,2$ i wytrzymałość na ściskanie $f_c = 30$ MPa. Pozostałe parametry typowe dla poszczególnych modeli materiału określono zgodnie z opisem zamieszczonym w podrozdziale 5.1. Analizie poddano wyłącznie rdzeń przekroju z pominięciem zbrojenia podłużnego. Promienie naroży strzemion wynosiły 20 mm. We wszystkich analizowanych przypadkach przekrój zbrojenia poprzecznego dobierano tak by stopień zbrojenia poprzecznego był równy $\rho_T = 0,5\%$. W miejscach gdzie dwa strzemiona pokrywają się stosowano podwójne pole przekroju pręta. Prezentowane dalej wyniki uzyskano przy użyciu siatek o wymiarze elementu 2 cm. Przy obliczeniach z wykorzystaniem modeli DP i MC obciążenie zwiększano w 50 krokach, przy wykorzystaniu modelu WW podzielono je na 500 przyrostów. Czas trwania obliczeń wynosił około 14-18 s w wariantach gdzie beton opisano modelami DP oraz MC oraz około 900 s w wariantach z kryterium plastyczności WW.

Przedstawiono 2 zestawienia. W pierwszym z nich na wykresach (rys. 5.38, 5.39) umieszczono łącznie wyniki związane z 3 modelami betonu dla tego samego typu przekroju. Pozwala to wskazać zakres spodziewanego przyrostu nośności uzwojonego rdzenia. W drugim (rys. 5.40, 5.41) zestawieniu połączono rozwiązania dla poszczególnych rodzajów zbrojenia poprzecznego uzyskane przy tym samym kryterium plastyczności betonu, co z kolei ułatwia porównanie efektywności uzwojenia poszczególnych przekrojów. Dodatkowo w tabelicy 5.6 przedstawiono podstawowe informacje o naprężeniach i siłach granicznych w poszczególnych wariantach.



(a) Przekrój wariant I, prosty układ strzemiem. (b) Przekrój wariant II, prosty układ strzemiem z dodatkowym zbrojeniem zszywającym.

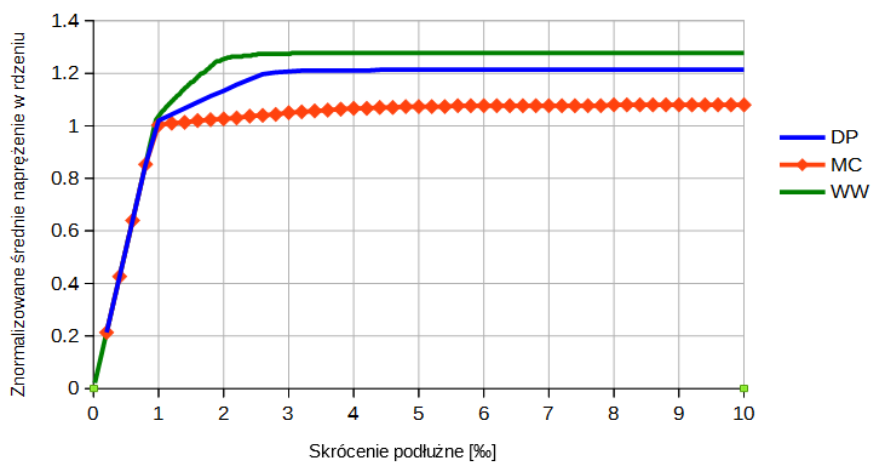


(c) Przekrój wariant III, zbrojenie zwojami.

Rysunek 5.37: Rysunki rozważanych przekrojów. Zakreskowano obszar rdzenia poddany analizie numerycznej. Zbrojenie podłużne nie było ujęte w modelu obliczeniowym.

Przekrój L zbrojenie tradycyjne

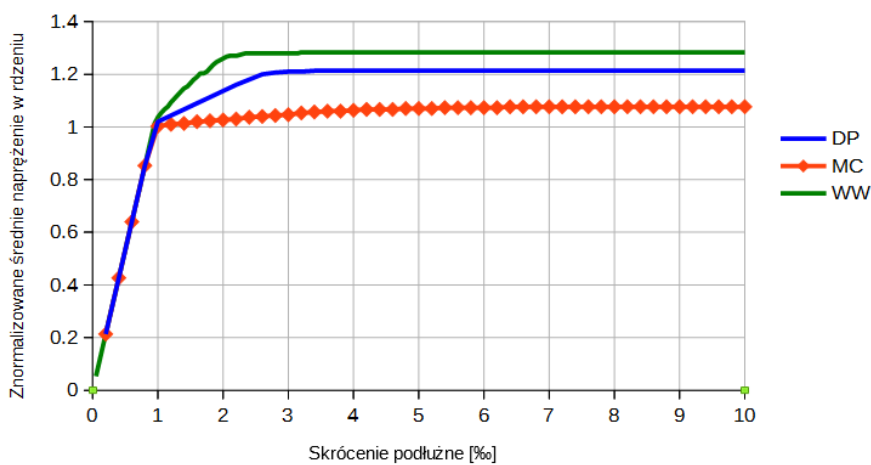
Beton C30/37
Stal AIIIIn
 $\rho_T=0,500\%$



(a) Przekrój wariant I, prosty układ strzemion.

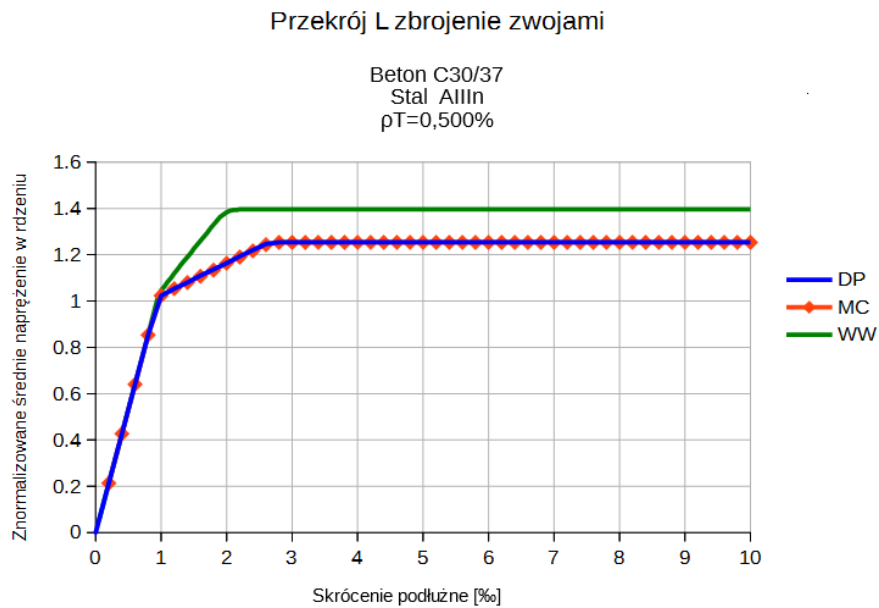
Przekrój L zbrojenie tradycyjne ze sztywnością

Beton C30/37
Stal AIIIIn
 $\rho_T=0,500\%$



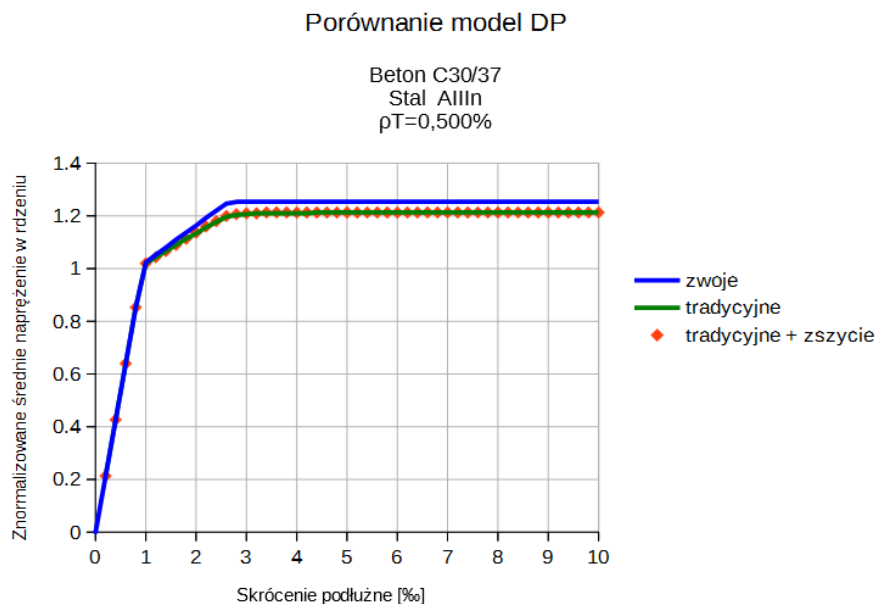
(b) Przekrój wariant II, prosty układ strzemion z dodatkowym zbrojeniem sztywającym.

Rysunek 5.38: Znormalizowane naprężenie osiowe wewnątrz rdzenia w funkcji skrócenia podłużnego. Zestawiono wyniki dla danego przekroju odpowiadające trzem modelom betonu.



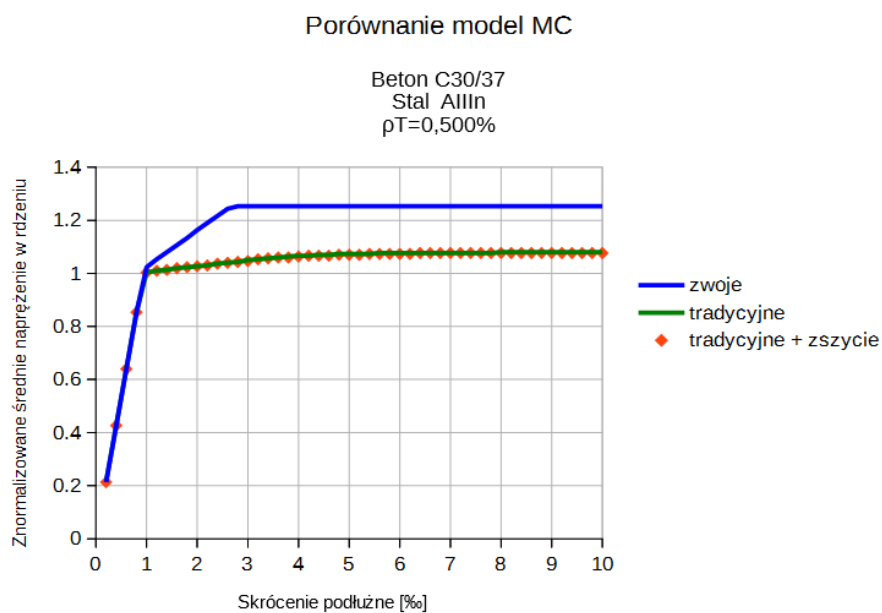
(a) Przekrój wariant III, zbrojenie zwojami.

Rysunek 5.39: Znormalizowane naprężenie osiowe wewnątrz rdzenia w funkcji skrócenia podłużnego. Zestawiono wyniki dla danego przekroju odpowiadające trzem modelom betonu.

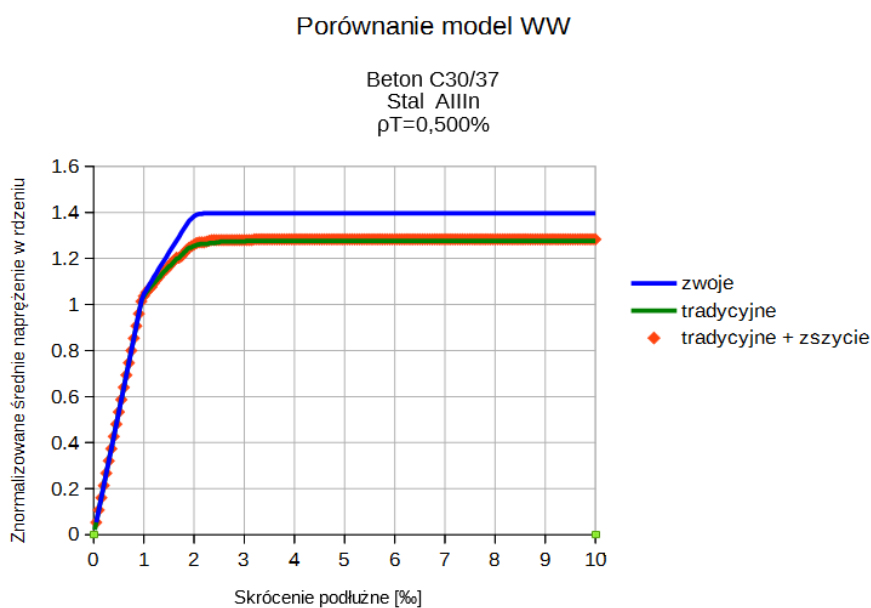


(a) Porównanie nośności rdzenia wg modelu DP.

Rysunek 5.40: Porównanie efektywności skrępowania rdzenia przy różnych modelach materiałowych dla betonu.



(a) Porównanie nośności rdzenia wg modelu MC.



(b) Porównanie nośności rdzenia wg modelu WW.

Rysunek 5.41: Porównanie efektywności skrępowania rdzenia przy różnych modelach materiałowych dla betonu.

Wyniki nie dają jednoznacznej odpowiedzi, który z przedstawionych sposobów kształtowania zbrojenia poprzecznego jest najefektywniejszy i do ich poprawnej interpretacji pomocne będzie doświadczenie wyniesione z serii obliczeniowych weryfikujących poprawność omawianego modelu.

Tablica 5.6: Syntetyczne wyniki symulacji.

Pole rdzenia	[cm ²]	2012			2012			1785		
Model		DP	MC	WW	DP	MC	WW	DP	MC	WW
Naprężenia w rdzeniu	[MPa]	36,40	32,37	38,34	36,44	32,31	38,29	37,57	37,56	41,90
Siła osiowa w rdzeniu	[MN]	7,323	6,512	7,713	7,331	6,500	7,703	6,708	6,706	7,481
Siła całkowita z otuliną	[MN]	9,388	8,577	9,778	9,396	8,565	9,768	9,452	9,450	10,22

Po pierwsze daje się zauważyć, że wartości naprężeń normalnych w rdzeniu uzyskane z obliczeń bazującym na modelu DP wykazują stosunkowo nieduże różnice niezależnie od ukształtowania zbrojenia: 21 % do 25 % przyrostu nośności w omawianych przypadkach. Przy wykorzystaniu modelu MC dla betonu przyrost ten mieści się w zakresie od 7,7 % do 25 %, a przy modelu WW od 28 % do 40 %. Należy zaznaczyć, że w ostatnim przypadku pomimo, że spodziewany był wyższy wynik niż przy pozostałych modelach z powodu zastosowania stowarzyszonego prawa płynięcia to jednak rezultat obciążony jest niepewnością związaną ze sztywnym przyjęciem parametrów funkcji plastyczności, które skalibrowane zostały na innym zadaniu. Po zebraniu większej ilości informacji dotyczących konkretnego betonu (5 sposobów zniszczenia próbek opisane w pracy [124]) pozwoli on bardziej precyzyjnie oszacować nośność badanych przekrojów. Z kolei model MC wykazał w 2 pierwszych przypadkach istnienie obszarów nieefektywnie skrępowanych, co też daje rezultat w postaci wyraźnie niższych wyników przyrostu nośności tych przekrojów.

Ponadto zauważamy, że najwyższe wartości naprężeń niezależnie od przyjętego modelu uzyskano w przekroju, w którym zastosowano zbrojenie poprzeczne wykonane ze zwojów. Oba pozostałe przekroje pomimo innego rozłożenia tej samej ilości stali pozwalały uzyskać zbliżone rezultaty. Co więcej, podobne obszary pozostawały nieefektywnie skrępowanych.

Poza wartością naprężeń normalnych w rdzeniu istotny jest udział rdzenia w całkowitej powierzchni przekroju, z czego wynika wartość siły osiowej, którą może on przemieścić w stanie granicznym. Tutaj zbrojenie zwojami wypada nieco gorzej niż strzemiona rozłożone na obwodzie i w ostatecznym ujęciu niweluje to lub ogranicza (zależnie od przyjętego modelu) wcześniej wspomniane korzyści.

Na podstawie wcześniej zebranych doświadczeń można przypuszczać, że w zadaniu, gdzie możemy spodziewać się wystąpienia istotnych obszarów nieefektywnie skrepowanych (wzdłuż długich odcinków prostych na krawędzi rdzenia między punktami przytrzymanymi poprzecznie) stosowanie modelu MC jest bardziej zachowawczym wyborem niż DP ze stożkiem opisanym na ostrosłupie MC (tak jak tu uczyniono), który może skutkować przeszacowaniem nośności w takich przypadkach. Najbardziej optymistyczne rezultaty uzyskane dzięki stosowaniu modelu WW w oparciu wyłącznie o jedną znaną stałą materiałową, oraz założone relacje pomiędzy pozostałymi należy traktować z jeszcze większą ostrożnością.

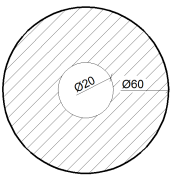
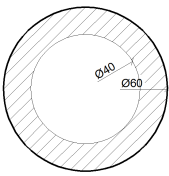
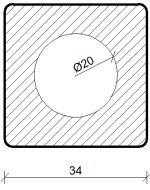
Uzwojenie przekroju niejednostopijnego na przykladzie slupa o przekroju pierścieniowym

Wykorzystanie slupów o przekroju poprzecznym niejednostopijnym nie jest tak powszechne jak wykonywanie elementów pełnych i jeżeli pojawia się już w literaturze zwykle występuje jest jako alternatywna, lżejsza forma slupa CFST z wewnetrznym płaszczem stalowym. Przedstawione poniżej warianty zadania nie mają żadnego dodatkowego zbrojenia wewnetrznej, swobodnej krawędzi przekroju. Wówczas należy spodziewać się duzych różnic między wartościami naprężeń głównych krepujących, co pozwoli ocenić jak w takiej sytuacji prezentują się rozwiązania uzyskane z wykorzystaniem poszczególnych modeli betonu.

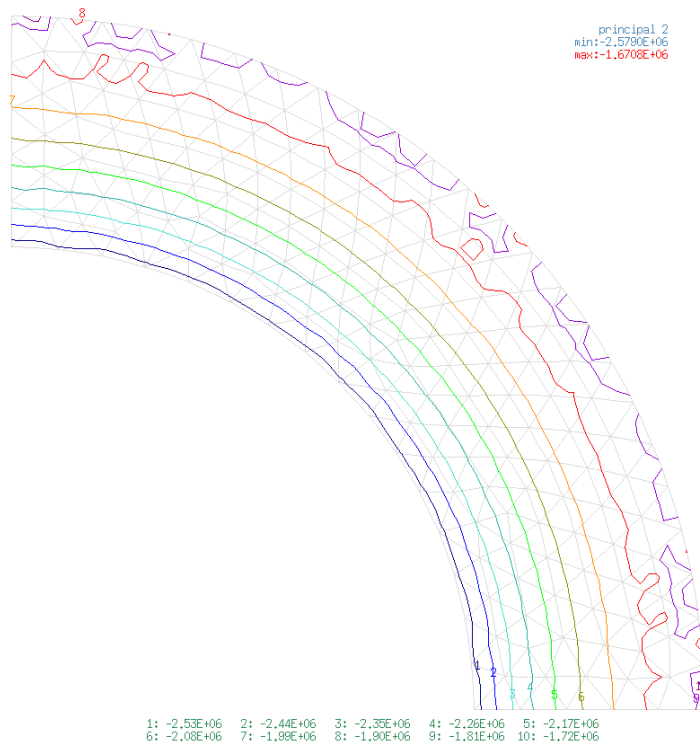
Rozważono kilka wariantów pierścieniowego przekroju slupa. Punktem wyjścia jest przekrój o średnicy zewnetrznej równej 600 mm i wewnetrznej 400 mm, ze zbrojeniem obwodowym wyłącznie na zewnetrznym brzegu. Stopień zbrojenia poprzecznego rozważano w dwóch wariantach $\rho_T = 0,5\%$ i $\rho_T = 2,0\%$, i odniesiony jest do przekroju betonowego rdzenia. Kolejny analizowany przekrój także jest pierścieniem o średnicy zewnetrznej równej 600 mm i wewnetrznej 200 mm, identycznie zbrojony o stopniu zbrojenia poprzecznego $\rho_T = 0,5\%$. Jako uzupełnienie przedstawiono wyniki analizy slupa o przekroju kwadratowym (z zaokrąglonymi narożami) o boku rdzenia 340 mm z centralnie umieszczonym otworem o średnicy 200 mm. Stałe materiałowe przyjęto podobnie jak w innych przykładach: dla stali zbrojenia poprzecznego $E_s = 200$ GPa, $f_y = 500$ MPa, dla betonu $E_c = 32$ GPa, $f_c = 30$ MPa, $\nu_c = 0,2$. Zbrojenie podłużne w omawianym przykładzie nie występuje. Dodatkowo, chociaż podstawowe zadanie jest osiowosymetryczne, wykorzystano ogólny schemat PSO opisany w pracy, dyskretyzując jedną ćwiartkę obszaru i wprowadzając warunki brzegowe na osiach symetrii. Obszar zdyskretyzowano elementami trójkątnymi sześciowęzłowymi na siatce o wymiarze elementu 20 mm. Obliczenia przeprowadzono w 3 wariantach stosując różne warunki plastyczności. Dla pierwszego z wymienionych przykładów powtórzono również obliczenia przy wykorzystaniu siatki o wymiarze elementu 10 mm.

Na rysunkach 5.42–5.45 przedstawiono rozkład naprężeń głównych przy skróceniu podłużnym słupa $\varepsilon_z = 4\text{‰}$ w postaci krzyży o długości ramion proporcjonalnej do wartości bezwzględnej i kierunku odpowiadającym kierunkowi naprężenia, które obrazują. Kolor niebieski przypisano wartościom ujemnym (ściskanie) zaś czerwony dodatnim (rozciąganie). Obok umieszczono warstwicę drugiego naprężenia głównego (ekstremalne ściskanie w płaszczyźnie przekroju). Ilustracja ta ma za zadanie pokazać zachowanie mechaniczne słupa skrępowanego w zależności od przyjętego modelu uplastycznienia rdzenia betonowego. Inny charakter pracy przekłada się na uzyskanie różnych oszacowań wartości średnich granicznych naprężeń w osi słupa, których obliczone wartości przedstawiono w tabeli 5.7.

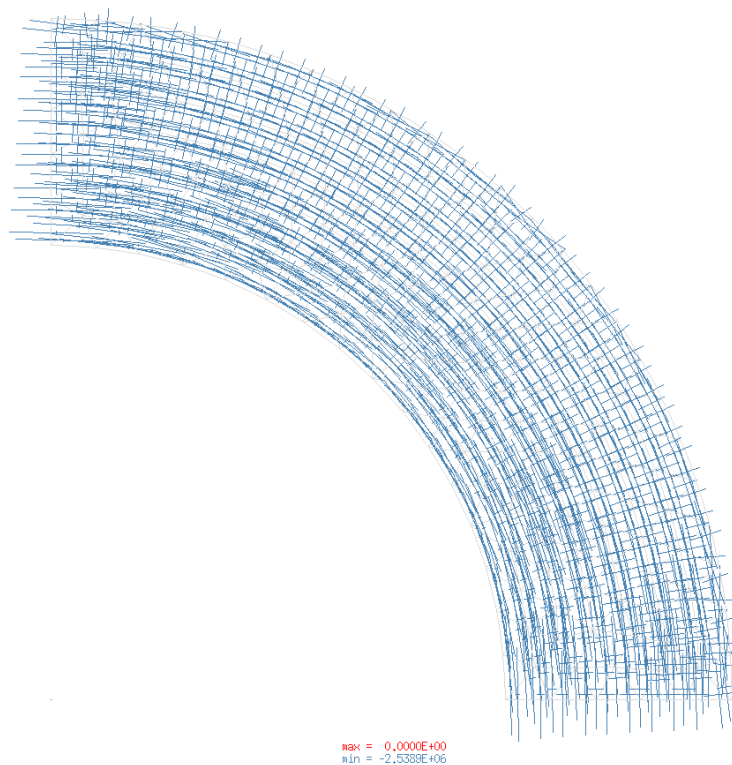
Tablica 5.7: Średnie wartości osiowego naprężenia granicznego w słupach z otworami.

					
Model betonu		ρ_T [%]			
		0,5	0,5	2,0	0,5
DP		34,934	34,929	49,325	34,841
MC	[MPa]	34,326	32,622	40,192	30,974
WW		37,785	37,243	53,972	36,641

W tabeli 5.7 przedstawiono wyniki średnich granicznych naprężeń uzyskanych przy wykorzystaniu siatki elementów o wymiarze 20 mm. Obliczenia powtórzone dla jednego z przykładów przy gęstszej siatce dały bardzo zbliżone rezultaty. Porównując wartości zebrane w tabeli dostrzegamy, że przy tym samym stopniu zbrojenia w modelach DP i WW względne różnice średnich naprężeń granicznych pomiędzy poszczególnymi przekrojami nie przekraczają 2%. Rezultaty uzyskane przy użyciu modelu MC różnią się istotnie, dając przy $\rho_T = 0,5\%$ przyrost nośności od nieco ponad 3% do ponad 14% zależnie od przekroju. Największe różnice pojawiają się w sytuacji gdy różnica pomiędzy dwoma naprężeniami głównymi w płaszczyźnie przekroju osiąga największe wartości. Najgorzej pod tym względem zachowuje się przekrój kwadratowy z otworem – nieosiowo-symetryczny. Dodatkowo można odnotować, że we wcześniej prezentowanych przykładach przekrojów jednospójnych, w których występowały obszary o okrągłym zbrojeniu poprzecznym różnice w wynikach uzyskiwanych przy wykorzystaniu modelu DP i MC zwykle były znikome.

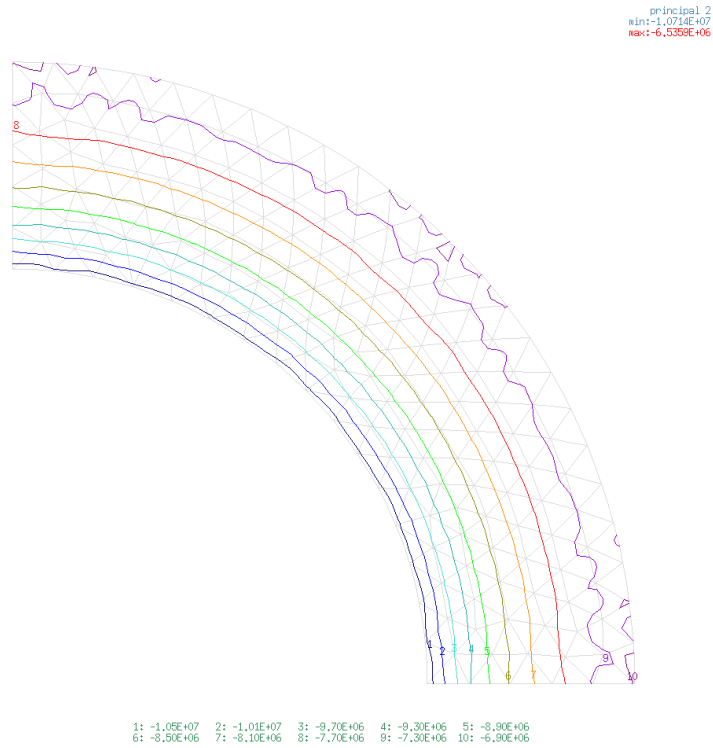


(a) Plan warstwowy naprężeń głównych ściskających (równoleżnikowa składowa naprężenia).

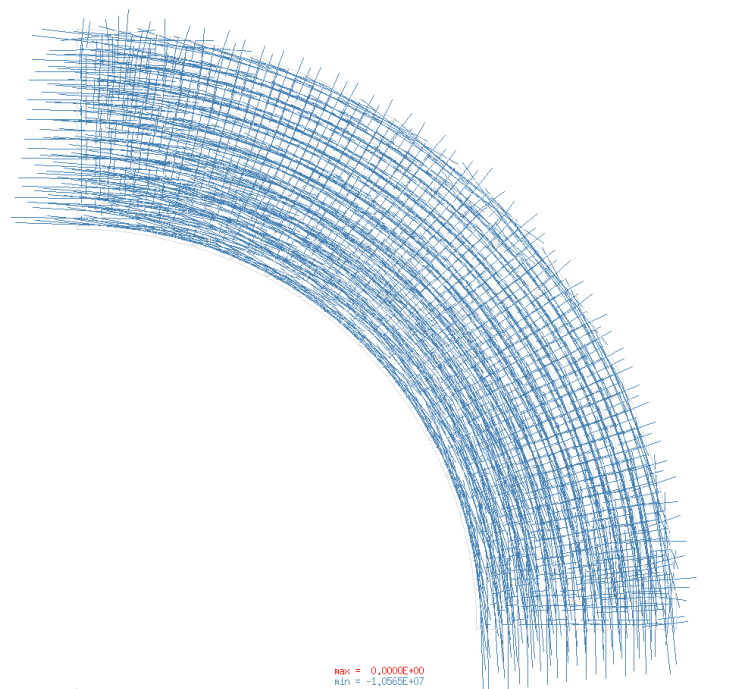


(b) Naprężenia główne w punktach całkowania numerycznego.

Rysunek 5.42: Naprężenia główne, pierścień 600/400 mm, $\rho_T = 0,5\%$, model DP.

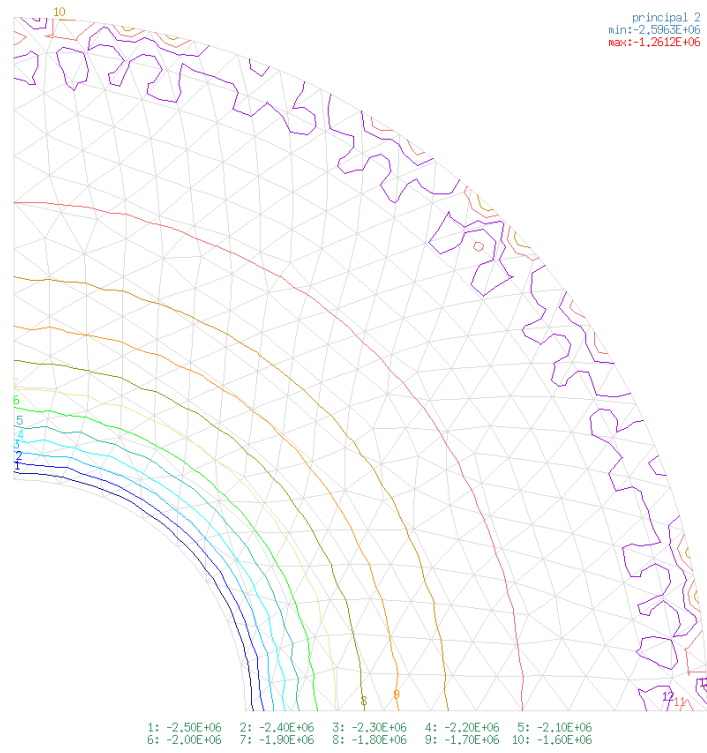


(a) Plan warstwowy naprężeń głównych ściskających (równoleżnikowa składowa naprężenia).

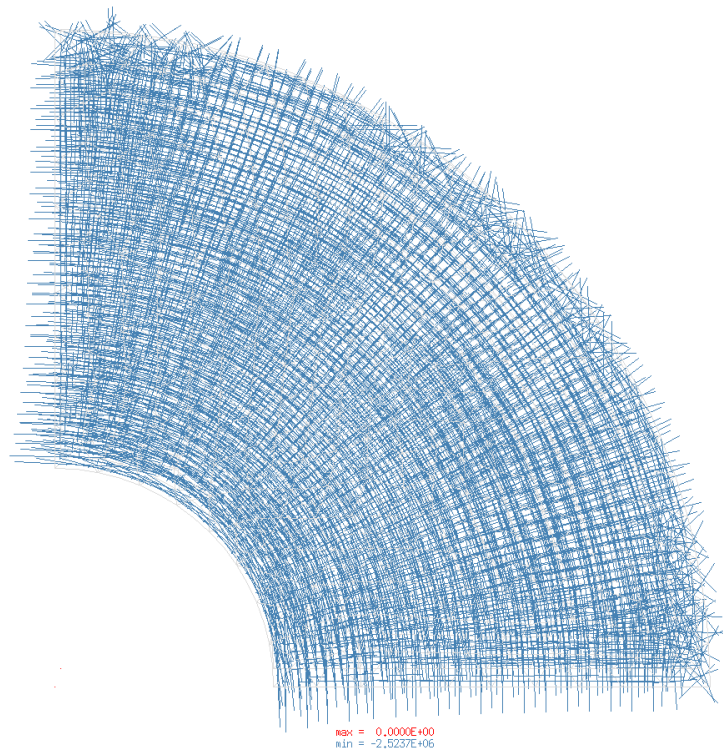


(b) Naprężenia główne w punktach całkowania numerycznego.

Rysunek 5.43: Naprężenia główne, pierścień 600/400 mm, $\rho_T = 2,0\%$, model DP.

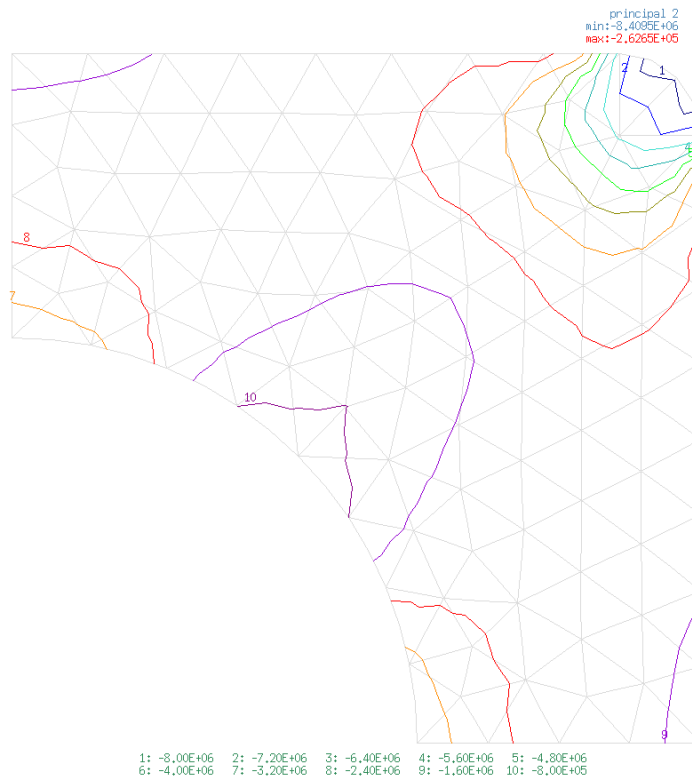


(a) Plan warstwowy naprężeń głównych ściskających (równoleżnikowa składowa naprężenia).

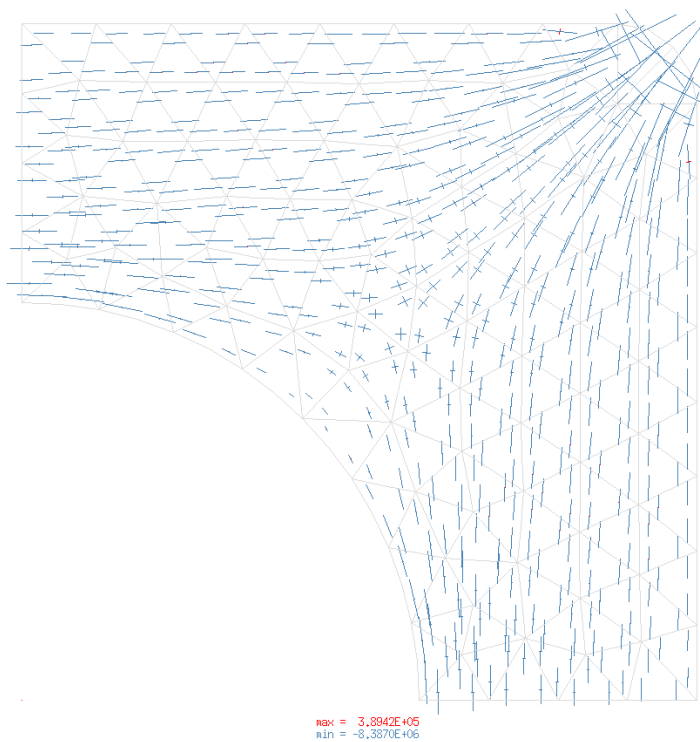


(b) Naprężenia główne w punktach całkowania numerycznego.

Rysunek 5.44: Naprężenia główne, pierścień 600/200 mm, $\rho_T = 0,5\%$, model DP.



(a) Plan warstwowy naprężeń głównych ściskających.



(b) Naprężenia główne w punktach całkowania numerycznego.

Rysunek 5.45: Naprężenia główne, przekrój kwadratowy z otworem, $\rho_T = 0,5\%$, model DP.

Wówczas wartości dwóch naprężeń głównych w płaszczyźnie przekroju były do siebie zbliżone, zaś w przedstawionych tu przykładach różnice są istotne. Ekstremalne wartości bezwzględne minimalnych naprężeń poprzecznych σ_{II} (w przekrojach osiowosymetrycznych są to składowe równoleżnikowe) są kilkukrotnie wyższe od wartości bezwzględnych σ_I – drugiego z naprężeń głównych w płaszczyźnie przekroju. Ponadto ekstrema występują na przeciwnych brzegach przekroju, a dodatkowo naprężenia prostopadłe do wewnętrznego otworu, z braku oddziaływań zewnętrznych, są równe zeru. Prowadzi to do zachodzenia mechanizmu opisanego przy podsumowaniu przykładów przedstawionych w punkcie 5.2.

Podsumowując, otwór wewnątrz rdzenia nie stanowi przeszkody przy wykorzystaniu przedstawionego modelu do określania nośności przekroju uzwojonego. Rezultaty symulacji są spójne z obserwacjami czynionymi w przypadkach przekrojów jednopójnych. Wewnętrzny, nieobciążony brzeg przekroju, na którym występują znaczne różnice wartości między naprężeniami głównymi σ_I i σ_{II} sprawia, że stosowanie modelu opartego o warunek plastyczności Mohra–Coulomba prowadzi do istotnego, fizycznie nieuzasadnionego zaniżenia wartości naprężeń osiowych.

5.6. Podsumowanie

Wykorzystując proponowany model obliczeniowy w zróżnicowanych zadaniach, poczyniono obserwacje dotyczące jego działania oraz spostrzeżenia związane z pracą mechaniczną słupa betonowego skrupowanego zbrojeniem poprzecznym. Główne spostrzeżenia dotyczące uzyskanych rezultatów są następujące:

1. Wykorzystane do rozwiązania zadania metody umożliwiają uzyskanie zbieżnego rozwiązania.
2. Zastosowany w większości przypadków, w których wykorzystano kryterium Druckera–Pragera lub Mohra–Coulomba do opisu plastyczności betonu podział obciążenia na 50 kroków okazał się wystarczający. Zmniejszenie wartości przyrostów obciążenia nie prowadziło do zmiany rezultatów. W tej grupie przykładów obliczeniowych wystarczające było do 100 iteracji by uzyskać stan równowagi przy założonej wielkości błędu względnego o wartości 10^{-3} .
3. W przypadkach, w których wykorzystano kryterium Willama–Warnkego konieczne było stosowanie mniejszych przyrostów obciążenia. W większości przypadków wystarczające było zastosowanie podziału na 200 kroków, chociaż wystąpiły sytuacje wymagające jeszcze mniejszych przyrostów. Uzyskanie błędu względnego na poziomie 10^{-3} wymagało do 200 iteracji, ale w większości analizowanych przypadków ich liczba była mniejsza niż 100.
4. Pod względem czasu obliczeń warianty modelu wykorzystujące warunki plastyczności DP lub MC są porównywalne, zaś wykorzystanie kryterium WW wymaga przy tej samej siatce obliczeniowej 10–20 razy więcej czasu.

5. Rezultaty uzyskiwane przy użyciu modelu MC wskazują najniższe wartości obciążenia granicznego, z kolei uzyskane przy użyciu modelu WW (przy zaproponowanych wartościach stałych materiałowych wobec braku dokładniejszych informacji) w większości przypadków wskazywały najwyższe wielkości obciążenia granicznego. Wyjątek stanowiły przekroje o kształtach zbrojenia innych niż złożonych z okrągłych zwojów, przy jednocześnie wysokiej mocy zbrojenia poprzecznego. Wówczas najwyższe wartości nośności przekroju uzyskuje się stosując model DP.
6. Przy braku dokładniejszych informacji o materiale stosowanie modelu 5-parametrowego Willama–Warnkego obarczone jest niepewnością przyjęcia stałych materiałowych.
7. W przypadku stosowania zbrojenia poprzecznego wyłącznie w postaci okrągłych zwojów w obszarach jednospójnych modele MC i DP prowadzą do bardzo zbliżonych rezultatów. We wszystkich innych przypadkach (gdy dwa naprężenia główne krępujące różnią się co do wartości) wykorzystanie modeli MC i DP o takich samych parametrach, w zaproponowanej konstrukcji warunków plastyczności sprawia, że oszacowanie naprężeń granicznych uzyskane z wykorzystaniem modelu MC jest zawsze nie większe niż uzyskane za pomocą modelu DP.
8. Stosowanie modelu MC (który w warunku plastyczności nie uwzględnia pośredniego co do wartości naprężenia głównego) w przekrojach z krawędziami obszaru rdzenia o zerowych lub prawie zerowych naprężeniach na brzegu skutkuje znacznym zaniżeniem prognozowanej wartości siły osiowej w porównaniu z pozostałymi rozważanymi modelami zachowania betonu.

Na podstawie przeprowadzonych symulacji poczyniono następujące obserwacje dotyczące zjawiska skrępowania rdzenia betonowego zbrojeniem poprzecznym:

1. Racjonalne zastosowanie zbrojenia poprzecznego przynosi wyższy przyrost nośności przekroju skrępowanego poddanego osiowemu ścisłaniu niż identyczna ilość zbrojenia podłużnego. Dodatkowo (co nie zostało bezpośrednio wykazane w przedstawionych symulacjach) poprawia odkształcalność w zakresie fazy plastycznej, ale nie wpływa na poprawę nośności przy zginaniu i ścisłaniu z dużym mimośrodem.
2. Wpływ zbrojenia poprzecznego na sztywność osiową w zakresie sprężystym kształtuje się na poziomie wzrostu sztywności o około $\Delta E_c \approx 0,4 \rho_T E_c$. Różnice zależą od kształtu zbrojenia poprzecznego oraz kształtu przekroju i w analizowanych przykładach nie przekraczają 10 %.
3. Najistotniejsze czynniki wpływające na przyrost nośności przekroju skrępowanego to kształt rdzenia, stopień zbrojenia poprzecznego, granica plastyczności stali zbrojeniowej oraz wytrzymałość betonu na ścisłanie.
4. Sposób kształtowania zbrojenia poprzecznego w przekroju kwadratowym wpływa w zakresie około 20 % na przyrost nośności rdzenia.
5. Efektywność skrępowania (względny przyrost nośności rdzenia) zależy od wytrzymałości betonu na ścisłanie i relacja ta jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna.

6. Zbyt intensywne zbrojenie poprzeczne nie zostanie w pełni wykorzystane przed zniszczeniem przekroju tzn. możliwe są sytuacje, w których przy odkształceniach odpowiadających zniszczeniu przekroju betonowego nie zostanie osiągnięta granica plastyczności w prętach zbrojenia poprzecznego.

Porównanie proponowanego modelu z wybranymi procedurami przedstawionymi w rozdziale 2.2

Przeprowadzono porównanie granicznych wartości naprężeń osiowych w rdzeniu uzyskanych różnymi metodami na przykładzie przekroju kwadratowego ze zbrojeniem poprzecznym w postaci strzemion na obwodzie jako możliwie prostego i typowego zadania, zarazem nieosiowo-symetrycznego. Przyjęto następujące założenia:

1. geometria odpowiada zadaniu przedstawionemu na rysunku (5.25a) czyli bok przekroju ma 40 cm wraz z otuliną, zaś bok rdzenia 34 cm,
2. zbrojenie poprzeczne w postaci pręta $\phi 8$ w rozstawie 50 mm, co daje stopień zbrojenia poprzecznego w odniesieniu do całego przekroju $\rho_T = 0,85\%$ lub o odniesieniu do rdzenia $\rho_T = 1,18\%$,
3. zbrojenie podłużne występuje wyłącznie w narożach,
4. wytrzymałość betonu na ściskanie wynosi $f_c = 30$ MPa, wytrzymałość stali na rozciąganie wynosi $f_y = 500$ MPa, moduły Younga odpowiednio $E_c = 32$ GPa, $E_s = 200$ GPa, stała Poissona betonu $\nu_c = 0,2$,
5. w przypadku braku innych wytycznych naprężenia poprzeczne (krępujące) określano na podstawie najpowszechniej stosowanego w literaturze przybliżenia $\sigma_T = \frac{\rho_T f_s}{2}$, które daje wynik zbliżony do uzyskiwanych numerycznie przy użyciu omawianego w pracy modelu.

Analizując wyniki zestawione w tabeli 5.8, w której przedstawiono wartości granicznych naprężeń osiowych w rdzeniu betonowym zauważamy, że rezultaty wykonanych symulacji nie odbiegają istotnie od uzyskanych innymi metodami. Bliżej mediany wypadają rozwiązania uzyskane przy wykorzystaniu warunków plastyczności DP i WW niż uzyskane z warunkiem MC. Co prawda dwa najniższe wyniki za [107, 58] uzyskano przy użyciu procedur przewidzianych przy stosowaniu zbrojenia zewnętrznego z włókien z tworzyw sztucznych lecz pojawiają się i inne, wcześniejsze prace sugerujące zbliżone wartości, jak choćby wg [108], która zwraca główną uwagę na redukcję obszaru efektywnie skrupowanego. Zaletą, która wyróżnia zastosowaną w niniejszej dysertacji metodę jest możliwość analizowania przekroju o dowolnym kształcie i przebiegu zbrojenia poprzecznego. Jednocześnie pozwala stosunkowo precyzyjnie oszacować graniczną wartość naprężeń normalnych w przekroju.

Tablica 5.8: Wybrane metody określania nośności przekroju uzwojonego.

Metoda	Średnie naprężenia osiowe w stanie granicznym f_{cc} [MPa]	Naprężenia poprzeczne σ_T [MPa]	Uwagi / istotne parametry
PN-EN-1992 [33]	$f_{cc} = 41,25$		$\sigma_T > 0,05f_c$
ModelCode2010 [51]	$f_{cc} = 40,716$	$\sigma_T = 1,431$	rdzeń prostokątny
Considère 1903 [21, 54]	$f_{cc} = 59,16$	$\sigma_T = 2,95$	
Richart 1929 [97]	$f_{cc} = 42,095$	$\sigma_T = 2,95$	$k = 4$
Richart 1934 [98]	$f_{cc} = 37,30$		
Freudenthal 1933 [37, 54]	$f_{cc} = 47,70$	$\sigma_T = 2,95$	$\rho \leq 3\%$
Mörsch 1950 [71, 54]	$f_{cc} = 45,93$	$\sigma_T = 5,31$	
Olszak 1954 [77, 78]	$f_{cc} = 40,49$	$\sigma_T = 3,178$	$\sigma_T < 0,3f_c$
Rüsch-Stöckl 1969 [102, 54]	$f_{cc} = 44,75$	$\sigma_T = 2,95$	$\nu_c = \frac{1}{5}$
Newman-Newman 1969 [73]	$f_{cc} = 45,10$		
Stöckl-Menne 1975 [114, 54]	$f_{cc} = 41,57$		
Müller 1975 [72, 54]	$f_{cc} = 46,28$		$\gamma = 2,7589$
Park-Priestley 1981 [88, 84]	$f_{cc} = 35,90$		
Sheikh-Uzmeri 1982 [108]	$f_{cc} = 34,06$		
Ahmad-Shah 1982 [3]	$f_{cc} = 42,55$		$\frac{\sigma_T}{f_c} \leq 0,68$
Fafitis-Shah 1985 [34]	$f_{cc} = 36,39$		
Mander-Park 1988 [64]	$f_{cc} = 42,44$	$\sigma_T = 1,431$	
Saatcioglu-Razvi 1992 [103, 93]	$f_{cc} = 37,65$	$\sigma_T = 1,164$	$f_s = f_{yt}$ $k_2 = 0,3947$
El-Dash-Ahmad 1994 [30]	$f_{cc} = 37,07$	$\sigma_T = 2,95$	
Karabinis-Kiousis 1994 [52]	$f_{cc} = 62,82$		
Cusson-Paultre 1995 [23]	$f_{cc} = 42,42$		BWW
Attard-Setunge 1996 [10, 105]	$f_{cc} = 46,66$		$k = 0,61568$
Hoshikuma 1997 [46]	$f_{cc} = 34,48$	$\sigma_T = 0,59$	$\alpha = 0,2$ kwadrat
Imran 2001 [48]	$f_{cc} = 45,61$		
Shehata 2002 [107]	$f_{cc} = 32,51$		CFRP, przekrój kwadratowy
Bousalem-Chikh 2007 [15]	$f_{cc} = 36,27$	$\sigma_T = 1,431$	σ_T jak u Mandera [64]
Moghadam 2010 [69]	$f_{cc} = 38,33$	$\sigma_T = 1,431$	σ_T jak w [64]
Eid 2010 [29]	$f_{cc} = 44,79$		$f_s = f_{yt}$
Lingola 2011 [58]	$f_{cc} = 33,79$		FRP
Awang 2013 [11, 79]	$f_{cc} = 41,01$		BWW, zbrojenie aktywne
DP	$f_{cc} = 41,21$	$\sigma_T = 2,897$	
MC	$f_{cc} = 33,92$	$\sigma_T = 2,899$	
WW	$f_{cc} = 43,65$	$\sigma_T = 2,897$	

6. Podsumowanie

W niniejszej dysertacji przedstawiono tematykę określania nośności przekroju betonowego słupa ze zbrojeniem poprzecznym. W myśl zasady ekonomii myślenia główny nacisk położono na optymalizację procesu projektowania. Przyjmowane założenia, które ograniczyły uniwersalność modelu, pozwoliły w przypadkach, gdzie skrepowanie przynosi największe korzyści uzyskać rozwiązania dużo niższym nakładem obliczeniowym. Skupienie się na słupach ściskanych osiowo umożliwiło sformułowanie problemu jako zadania dwuwymiarowego, w którym analizowany obszar ogranicza się do przekroju poprzecznego słupa. Wykorzystanie odkształceń podłużnych (oznaczających skrócenie słupa) w roli obciążenia pozwala w pierwszej kolejności określić rozkład naprężeń w rozważanym przekroju i na tej podstawie, znaleźć wartość graniczną siły osiowej. Zastosowanie sprężysto–plastycznych modeli materiału dla betonu i stali zbrojenia poprzecznego oraz dwuparametrowych funkcji plastyczności z niestowarzyszonym prawem płynięcia plastycznego okazało się w pełni wystarczające by w zadaniach kontrolnych wynikami nie odbiegać od procedur opartych na bardziej złożonych modelach matematycznych lub wyprowadzonych bezpośrednio na podstawie wyników badań eksperymentalnych. Dodatkowo przedstawione rozwiązanie zagadnienia skrepowania rdzenia betonowego pozwala analizować przekroje o praktycznie dowolnym kształcie, wykorzystując do dyskretyzacji obszaru elementy trójkątne krzywoliniowe.

Dzięki wykorzystaniu tej swobody projektowania, w zamieszczonych przykładach obliczeniowych, wykazano, że w przekrojach kwadratowych bardziej optymalne prowadzenie zbrojenia poprzecznego pozwala uzyskać do 20% lepsze efekty skrepowania niż przy stosowaniu najprostszych rozwiązań. Ponadto zauważono, że przedstawiony w dysertacji model wykorzystujący kryterium plastyczności Mohra–Coulomba jest niedostatecznie uniwersalny, a jego wykorzystanie powinno być ograniczone do przekrojów ze zbrojeniem poprzecznym w formie okręgów. Z kolei stosowanie warunku pięcioparametrowego Willama–Warnkego jest uzasadnione głównie w sytuacji gdy znane są wartości pięciu stałych materiałowych. Bazowanie na relacjach zaczerpniętych z literatury pozwala uzyskać wyniki (na podstawie przeprowadzonym w dysertacji porównań można uznać je za wiarygodne), które w większości wypadków są najmniej zachowawcze. Dodatkowo są one osiągnane dużo większym kosztem obliczeniowym głównie z powodu większej złożoności warunku plastyczności oraz wolniejszej zbieżności procedury iteracyjnej. Wobec powyższych, w takiej sytuacji stosownym kompromisem między dokładnością a wydajnością wydaje się być stosowanie warunku plastyczności Druckera–Pragera w wariacie stożka

opisanego na ostrosłupie Mohra–Coulomba do opisu plastyczności betonu. Wykorzystanie w modelu niestowarzyszonego prawa płynięcia poprawiło dodatkowo jakość odwzorowania bez zauważalnego pogorszenia wydajności programu.

Całość uzyskanych rezultatów prowadzi do wniosku, że udało się zrealizować główny cel pracy, którym było przedstawienie prostego modelu zjawiska skrępowania słupa betonowego z wykorzystaniem metod numerycznych. Zaprezentowany model stanowi użyteczne narzędzie mogące z powodzeniem służyć do rozwiązywania zagadnień inżynierskich, do których został przygotowany.

Główne cechy pracy

- Prezentacja prostego, spójnego i uniwersalnego w zakresie geometrii przekroju modelu zjawiska skrępowania słupów betonowych zbrojeniem poprzecznym.
- Zastosowanie uogólnionego płaskiego stanu odkształcenia w modelowaniu zjawiska skrępowania.
- Obliczenia prowadzone z wykorzystaniem przemieszczeniowego ujęcia metody elementów skończonych.
- Stosowanie elementów skończonych klasy C^0 o kwadratowych funkcjach kształtu, dla elementów prętowych stosowanie elementów przenoszących wyłącznie siłę podłużną.
- Zastosowanie nieliniowych fizycznie modeli materiału (sprężysto–plastycznych) do modelowania rdzenia betonowego oraz prętów uzwojenia.
- Przegląd rozważanych do implementacji warunków plastyczności betonu o różnym stopniu rozbudowania funkcji plastyczności (w tym różnej liczby i rodzaju parametrów materiałowych) i funkcji potencjału plastycznego.
- Przegląd literatury badań, opisu i modelowania numerycznego zjawiska skrępowania betonu zbrojeniem poprzecznym.
- Wykonanie serii obliczeń pokazujących wpływ poszczególnych czynników na nośność przekroju.
- Wykonanie serii obliczeń w celu zbadania wpływu kształtowania trasy zbrojenia poprzecznego w przekrojach kwadratowych na efektywność wykorzystania jego pracy ze względu na nośność przekroju.
- Sprawdzenie działania poprawności przedstawionego modelu w zadaniach kontrolnych i porównanie rozwiązań z rozwiązaniami uzyskanymi innymi metodami.

A. Dodatek

Ta część pracy składa się z czterech podrozdziałów, z których każdy dotyczy odrębnych zagadnień związanych z głównym tematem pracy. Pierwszy ma na celu przywołanie i wyjaśnienie symboli podstawowych pojęć, które wykorzystywano w dysertacji bez wcześniejszego definiowania. Drugi i trzeci prezentują alternatywne podejścia do rozwiązania zagadnienia sprężysto–plastycznego, które jednak nie zostały wykorzystane w prezentowanym modelu obliczeniowym, ale są pomocne w zrozumieniu mechanizmu plastyczności tzn. ustalania pól naprężenia i odkształcenia poprzez całkowanie związków fizycznych po osiągnięciu granicy plastyczności w analizowanych obszarach zadania. Czwarty podrozdział obejmuje przykłady obliczeniowe obrazujące wpływ stałych materiałowych na osiągnięte efekty skrępowania przekroju betonowego. Pokazują one relacje, które są obszernie opisane w literaturze, uzyskane dla trzech prezentowanych modeli fizycznych betonu. Pozwala to dodatkowo ocenić poprawność przedstawionego rozwiązania.

A.1. Definicje

Tensor naprężenia. Aksjator i dewiator

Na wstępie wprowadźmy opis stanu naprężenia. Dla dowolnego kartezjańskiego układu współrzędnych tensor naprężenia, nazwijmy go σ , ma 9 składowych, przy czym tylko 6 niezależnych. Związki wpływające na zmniejszenie liczby niezależnych składowych z 9 do 6 wynikają z konieczności spełnienia warunków równowagi:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Równania równowagi Naviera mają postać:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad (\text{A.2})$$

gdzie b_i – składowe wektora sił objętościowych, na przykład grawitacyjnych. Z zasady zachowanie krętu wynika równanie:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (\text{A.3})$$

Zatem tensor naprężenia na podstawie wzorów (A.1) oraz (A.3) można przedstawić w postaci:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

W każdym punkcie analizowanego obszaru, rozwiązując zagadnienie wartości własnych tensora, możemy przedstawić stan naprężenia w postaci 3 wartości głównych. Opis taki uzupełniają wartości kosinusów kierunkowych określające układ główny (w którym przedstawione są naprężenia główne) względem globalnego układu współrzędnych. Jeżeli w rozważaniach pojawiają się naprężenia główne w losowej lub uporządkowanej kolejności, stosowane jest następujące rozróżnienie:

– nieuporządkowane:

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,$$

– uporządkowane nierosnąco:

$$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}.$$

Z tensora naprężeń wydzielić można część kulistą σ^A – aksjator i odśrodkową σ^D – dewiator. Część kulista reprezentuje ciśnienie hydrostatyczne – równomierne rozciąganie/ściskanie i w konsekwencji prowadzi do zmian objętości, zaś część odśrodkowa odpowiada za odkształcenia postaciowe

$$\sigma_{ij}^A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}I_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}I_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}I_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_{ij}^D = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \frac{1}{3}I_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \frac{1}{3}I_1 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \frac{1}{3}I_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

gdzie I_1 oznacza pierwszy niezmiennik stanu naprężenia.

Opis stanu naprężenia przez niezmienniki

Do opisu stanu naprężenia w sytuacji, gdy badane jest wyężenie materiału, wygodne jest stosowanie niezmienników tensora naprężenia. Niezależnie od wyboru układu współrzędnych ich wartości są stałe. Poniżej przedstawiono ich definicje.

Pierwszy niezmiennik tensora stanu naprężenia:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}. \quad (\text{A.7})$$

Drugi niezmiennik tensora stanu naprężenia:

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 + \sigma_{11} \sigma_{33} - \sigma_{13}^2 + \sigma_{22} \sigma_{33} - \sigma_{23}^2 = \\ &= \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_I \sigma_{III} + \sigma_{II} \sigma_{III}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Trzeci niezmiennik tensora stanu naprężenia:

$$\begin{aligned} I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} + 2\sigma_{12} \sigma_{13} \sigma_{23} + \\ &- (\sigma_{11} \sigma_{23}^2 + \sigma_{22} \sigma_{13}^2 + \sigma_{33} \sigma_{12}^2) = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Ponadto w praktyce przydatne jest posługiwanie się również niezmiennikami dewiatora stanu naprężenia. Dla odróżnienia od niezmienników pełnego tensora, które są oznaczane wielką literą I , te są oznaczone J .

Pierwszy niezmiennik tensora dewiatora stanu naprężenia ma stałą wartość:

$$J_1 = (\sigma_{11} - \frac{1}{3}I_1) + (\sigma_{22} - \frac{1}{3}I_1) + (\sigma_{33} - \frac{1}{3}I_1) = I_1 - I_1 = 0. \quad (\text{A.10})$$

Drugi niezmiennik tensora dewiatora stanu naprężenia jest równy:

$$\begin{aligned} J_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \frac{1}{3}I_1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \frac{1}{3}I_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \frac{1}{3}I_1 & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} - \frac{1}{3}I_1 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} \sigma_{22} - \frac{1}{3}I_1 & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} - \frac{1}{3}I_1 \end{vmatrix} = \left(\sigma_{11} - \frac{1}{3}I_1\right) \left(\sigma_{22} - \frac{1}{3}I_1\right) - \sigma_{12}^2 + \\ &+ \left(\sigma_{11} - \frac{1}{3}I_1\right) \left(\sigma_{33} - \frac{1}{3}I_1\right) - \sigma_{13}^2 + \left(\sigma_{22} - \frac{1}{3}I_1\right) \left(\sigma_{33} - \frac{1}{3}I_1\right) - \sigma_{23}^2 = \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Trzeci niezmiennik tensora dewiatora stanu naprężenia wyraża się następująco:

$$\begin{aligned}
J_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \frac{1}{3}I_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \frac{1}{3}I_1 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \frac{1}{3}I_1 \end{vmatrix} = \\
&= \left(\sigma_{11} - \frac{1}{3}I_1\right) \left(\sigma_{22} - \frac{1}{3}I_1\right) \left(\sigma_{33} - \frac{1}{3}I_1\right) + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} + \\
&- \left[\left(\sigma_{11} - \frac{1}{3}I_1\right) \sigma_{23}^2 + \left(\sigma_{22} - \frac{1}{3}I_1\right) \sigma_{13}^2 + \left(\sigma_{33} - \frac{1}{3}I_1\right) \sigma_{12}^2 \right] = \\
&= \frac{1}{27} (2\sigma_I - \sigma_{II} - \sigma_{III}) (2\sigma_{II} - \sigma_I - \sigma_{III}) (2\sigma_{III} - \sigma_I - \sigma_{II}). \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

Opis stanu naprężenia przez niezmienniki (p, q, r)

System (p, q, r) jest często stosowany w odniesieniu do materiałów sypko-spoistych, takich jak grunty czy skały, a także dla betonów. Najczęściej wykorzystywany jest do opisu modeli Mohra-Coulomba i Druckera-Pragera. Relacje do wcześniej przedstawionych niezmienników tensora stanu naprężenia przedstawiono poniżej:

$$p = \frac{1}{3}I_1, \quad (\text{A.13})$$

$$q = \sqrt{3J_2}, \quad (\text{A.14})$$

$$r = 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}J_3}. \quad (\text{A.15})$$

Opis stanu naprężenia we współrzędnych Haigha-Westergaarda.

System współrzędnych cylindrycznych (ξ, ρ, θ) Haigha-Westergaarda jest w wielu sytuacjach wygodny przy zmianie z wcześniej zdefiniowanego układu kartezjańskiego $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ gdyż zachowuje tę samą skalę naprężeń i ma czytelną interpretację: ξ – współrzędna na osi ciśnienia hydrostatycznego, ρ – odległość od osi ciśnienia hydrostatycznego na płaszczyźnie dewiatorowej, θ – kąt Lodego – kąt obrotu w płaszczyźnie dewiatorowej między przyjętym kierunkiem odniesienia a kierunkiem zdefiniowanym przez punkt obrazujący stan naprężenia w przestrzeni naprężeń.

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}I_1 = \sqrt{3}p, \quad (\text{A.16})$$

$$\rho = \sqrt{2J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}q, \quad (\text{A.17})$$

$$\cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}} = \left(\frac{r}{q}\right)^3. \quad (\text{A.18})$$

Na podstawie wzoru (A.18) kąt θ w zakresie $0^\circ - 60^\circ$ można obliczać następująco [59]:

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}}\right) = \frac{1}{3} \arccos\left(\left(\frac{r}{q}\right)^3\right). \quad (\text{A.19})$$

Tensor małego odkształcenia

W prowadzonych analizach wykorzystywany jest tensor małego odkształcenia ε wprowadzony przez Cauchy'ego.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Poszczególne składowe zdefiniowane są według następującej reguły:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (\text{A.21})$$

gdzie \mathbf{u} oznacza wektor przemieszczenia. Bezpośrednio z równania (A.21) wynika symetria tensora względem głównej przekątnej, co oznacza, że liczba jego niezależnych składowych jest równa 6. Zatem możemy przedstawić go w postaci:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

A.2. Całkowanie związków konstytutywnych względem czasu metodą jawną

Rozwiązanie metodą jawną nie zostało wykorzystane w algorytmach użytych do przygotowania przykładów obliczeniowych zamieszczonych w niniejszej pracy. Ten sposób poszukiwania stanu naprężenia i odkształcenia po uplastycznieniu opiera się na obliczaniu przyrostów na podstawie rozwiązania z poprzedniego kroku obciążenia. W ogólności algorytm ten jest mniej dokładny od zastosowanej i opisanej w głównej części pracy metody niejawnej. Przygotowując poniższe wyprowadzenie wykorzystano opisy metody zawarte w [20, 19, 85].

Przyrost mnożnika plastycznego

Wychodząc z założenia, że prędkość tensora odkształcenia (3.6)

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p,$$

oraz związków konstytutywnych (3.7)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}, \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}},$$

tensor prędkości odkształcenia może zostać wyrażony następująco:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{I}_1}{9K} \delta_{ij} + \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{2G_{\text{Kirchhoff}}} + \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (\text{A.23})$$

gdzie K i $G_{\text{Kirchhoff}}$ to odpowiednio moduł odkształcalności objętościowej (Helmholtza) i moduł odkształcalności postaciowej (Kirchhoffa). Rozwiązując powyższe równanie względem $\dot{\sigma}_{ij}$ uzyskamy:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_{\text{Kirchhoff}} \dot{\epsilon}_{ij} - 2G_{\text{Kirchhoff}} \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{2G_{\text{Kirchhoff}}}{9K} \dot{I}_1 \delta_{ij}. \quad (\text{A.24})$$

Możemy zauważyć, że jeżeli $\dot{\lambda} > 0$, to przyrost wartości funkcji plastyczności musi być zerowy, gdyż naprężenia pozostają zawsze na jej powierzchni, zatem:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0. \quad (\text{A.25})$$

Zarazem:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \dot{I}_1 \delta_{ij}. \quad (\text{A.26})$$

Jednocześnie \dot{I}_1 możemy wyrazić wykorzystując równanie (A.23) i podstawiając $i = j$ co pozwoli nam uzyskać następujący rezultat:

$$\dot{I}_1 = 3K \left(\dot{\epsilon}_{kk} - \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} \right). \quad (\text{A.27})$$

Dokonując podstawienia do równania (A.25) równań (A.26), (A.24), (A.27) otrzymujemy następujące równanie:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \left[2G_{\text{Kirchhoff}} \dot{\epsilon}_{ij} - 2G_{\text{Kirchhoff}} \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} + \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{2G_{\text{Kirchhoff}}}{3K} \right) \left(\dot{\epsilon}_{kk} - \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}} K \delta_{mn} \right) \delta_{ij} \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

z którego wynika, że:

$$\dot{\lambda} = \frac{2G_{\text{Kirchhoff}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \left(K - \frac{2}{3}G_{\text{Kirchhoff}}\right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ii}} \dot{\epsilon}_{jj}}{2G_{\text{Kirchhoff}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}} + \left(K - \frac{2}{3}G_{\text{Kirchhoff}}\right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mm}} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{nn}}}. \quad (\text{A.29})$$

Budowa macierzy sprężysto–plastycznej

Do przedstawienia zachowania materiału w fazie sprężystej wystarcza znana z teorii sprężystości postać macierzy sprężystej D_{ijkl} , która stanowi punkt wyjścia do dalszych rozważań.

$$D_{ijkl} = 2G_{\text{Kirchhoff}} \delta_{ik} \delta_{jl} + \left(K - \frac{2}{3}G_{\text{Kirchhoff}}\right) \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (\text{A.30})$$

By móc przedstawić relację naprężenie–odkształcenie w stanie plastycznym analogicznie jak w zadaniu sprężystym, konieczne będzie wprowadzenie macierzy sprężysto–plastycznej, którą oznaczymy jako D_{ijkl}^{ep} . Wówczas:

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^{\text{ep}} \dot{\epsilon}_{kl}. \quad (\text{A.31})$$

Wykorzystując równania (A.26), (A.24), (A.27), w przypadku materiału izotropowego możemy zapisać następującą zależność:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= 2G_{\text{Kirchhoff}} \dot{\epsilon}_{ij} + \left(K - \frac{2}{3}G_{\text{Kirchhoff}}\right) \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} - \\ &- \dot{\lambda} \left[\left(K - \frac{2}{3}G_{\text{Kirchhoff}}\right) \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} + 2G_{\text{Kirchhoff}} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Można przy tym zauważyć, że z równania da się wyznaczyć dewiator prędkości tensora odkształcenia:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij}. \quad (\text{A.33})$$

Jednocześnie, zważywszy, że funkcję plastyczności $F(\sigma_{ij})$ przedstawiono w rozdziale 3. jako $F(I_1, J_2, J_3)$. Pochodną $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ można przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (\text{A.34})$$

przy czym, jak pokazano w [19]:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij}, \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}, \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij}. \quad (\text{A.37})$$

Analogicznie postąpić można z funkcją potencjału plastycznego $G(\sigma_{ij})$, która w analizowanych w pracy modelach Druckera–Pragera oraz Mohra–Coulomba jest powiązana z funkcją plastyczności. Ostatecznie równanie (A.32) przybiera postać:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= 2G_{\text{Kirchhoff}} \dot{\epsilon}_{ij} + K \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} - \\ &- \dot{\lambda} \left[3K \frac{\partial G}{\partial I_1} \delta_{ij} + 2G_{\text{Kirchhoff}} \left(\frac{\partial G}{\partial J_2} s_{ij} + \frac{\partial G}{\partial J_3} \left(s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Wprowadzając te same podstawienia do równania (A.29) uzyskamy:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{H} \left[3K \frac{\partial F}{\partial I_1} \dot{\epsilon}_{kk} + 2G_{\text{Kirchhoff}} \left(\frac{\partial F}{\partial J_2} s_{ij} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \left(s_{il} s_{lj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} \right) \right) \dot{\epsilon}_{ij} \right], \quad (\text{A.39})$$

gdzie H jest wyrażone następująco:

$$\begin{aligned} H &= 2G_{\text{Kirchhoff}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} + \left(K - \frac{2}{3} G_{\text{Kirchhoff}} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mm}} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{nn}} = \\ &= 9K \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial G}{\partial I_1} + 2G_{\text{Kirchhoff}} \left(\frac{\partial F}{\partial I_1} \delta_{ij} + \frac{\partial F}{\partial J_2} s_{ij} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \left(s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} \right) \right) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{\partial G}{\partial I_1} \delta_{ij} + \frac{\partial G}{\partial J_2} s_{ij} + \frac{\partial G}{\partial J_3} \left(s_{il} s_{lj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} \right) \right) - 6G_{\text{Kirchhoff}} \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial G}{\partial I_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Mając powyższe na względzie macierz sprężysto–plastyczną uzyskamy rozwijając wyrażenie:

$$D_{ijkl}^{\text{ep}} = 2G_{\text{Kirchhoff}} \delta_{ik} \delta_{jl} + \left(K - \frac{2}{3} G_{\text{Kirchhoff}} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{H} H_{ij}^F H_{kl}^G, \quad (\text{A.41})$$

gdzie odpowiednio:

$$H_{ij}^F = 3K \frac{\partial F}{\partial I_1} \delta_{ij} + 2G_{\text{Kirchhoff}} \left[\frac{\partial F}{\partial J_2} s_{ij} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \left(s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} \right) \right], \quad (\text{A.42})$$

$$H_{kl}^G = 3K \frac{\partial G}{\partial I_1} \delta_{kl} + 2G_{\text{Kirchhoff}} \left[\frac{\partial G}{\partial J_2} s_{kl} + \frac{\partial G}{\partial J_3} \left(s_{km} s_{ml} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{kl} \right) \right]. \quad (\text{A.43})$$

Należy zwrócić uwagę, że macierz sprężysto–plastyczna, która umożliwia obliczenie przyrostów naprężeń, jest uzależniona od stanu naprężenia w poprzednim kroku.

Oznacza to, że po każdym kolejnym przyroście obciążenia, które wywołuje odkształcenia plastyczne, macierz sprężysto–plastyczna wymaga aktualizacji wartości.

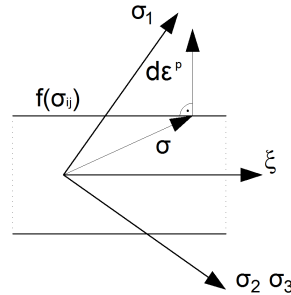
A.3. Równania Prandtla–Reussa

W rozdziale 4. przedstawiono sposób aktualizacji naprężeń i odkształceń plastycznych w ujęciu ogólnym. W przypadku elementów jednowymiarowych, które wykorzystywano do modelowania zbrojenia poprzecznego wystarczające jest prostsze podejście, które tu przedstawiono, opierając się głównie na [20, 19].

Przywołane w punkcie 3.2 równanie (3.6), określające prędkość odkształceń, wymaga wyznaczenia wielkości przyrostów mnożnika plastycznego λ . W pierwszej kolejności przedstawmy całkowity przyrost $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ jako sumę części dewiatorowej i kulistej:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{e}_{ij}^p + \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{kk}^p \delta_{ij}, \quad (\text{A.44})$$

gdzie e_{ij}^p to dewiator tensora odkształceń plastycznych, zaś kropka nad wyrażeniem oznacza pochodną względem czasu (prędkość).



Rysunek A.1: Schemat obrazujący warunek ortogonalności odkształceń plastycznych dla materiału Prandtla–Reussa. Ograniczeniem przestrzeni naprężeń plastycznie dopuszczalnych jest warunek Hubera. Przyrosty odkształceń plastycznych są prostopadłe do osi hydrostatycznej, więc nie wywołują zmiany objętości.

Ponadto, jak zauważono w [136], materiał idealnie plastyczny po osiągnięciu stanu plastycznego nie zmienia objętości, co oznacza, że:

$$\frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0, \quad (\text{A.45})$$

jednocześnie pozwala to spełnić warunek ortogonalności przyrostów odkształcenia do powierzchni plastycznej, a równanie (A.44) upraszcza się do postaci:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{e}_{ij}^p. \quad (\text{A.46})$$

Analogicznie możemy rozłożyć na dwa składniki tensor naprężenia:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad (\text{A.47})$$

gdzie s_{ij} jest dewiatorem tensora naprężenia.

Należy zauważyć, że część kulista tensora naprężeń wywoła zmianę objętości jedynie w sprężystym zakresie pracy materiału. Ciśnienie hydrostatyczne nie wpłynie na odkształcenia po uplastycznieniu stąd przyrosty odkształceń plastycznych można wyrazić w postaci:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \dot{\lambda}s_{ij}, \quad (\text{A.48})$$

co prowadzi wprost do równań Prandtla–Reussa:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11}^P &= \frac{2}{3}\dot{\lambda}\left[\sigma_{11} - \frac{1}{2}(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right], \\ \dot{\varepsilon}_{22}^P &= \frac{2}{3}\dot{\lambda}\left[\sigma_{22} - \frac{1}{2}(\sigma_{33} + \sigma_{11})\right], \\ \dot{\varepsilon}_{33}^P &= \frac{2}{3}\dot{\lambda}\left[\sigma_{33} - \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right], \\ \dot{\varepsilon}_{12}^P &= \dot{\lambda}\sigma_{12}, \\ \dot{\varepsilon}_{23}^P &= \dot{\lambda}\sigma_{23}, \\ \dot{\varepsilon}_{31}^P &= \dot{\lambda}\sigma_{31}. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Powyższy układ równań wiąże poszczególne składowe przyrostu odkształceń plastycznych ze składowymi stanu naprężenia, lecz w dalszym ciągu konieczne jest ustalenie prędkości mnożnika plastycznego. Wychodząc z równania (A.48) możemy zapisać następujące równania:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_1^P}{s_1} = \frac{\dot{\varepsilon}_2^P}{s_2} = \frac{\dot{\varepsilon}_3^P}{s_3} = \dot{\lambda}. \quad (\text{A.50})$$

Wykorzystując równania Prandtla–Reussa, poszukujemy rozwiązania względem niewiadomej $\dot{\lambda}$. Chen [20] przedstawia to rozwiązanie w następującej postaci:

$$\dot{\lambda} = \frac{d\bar{e}^P}{\sqrt{J_2}}, \quad (\text{A.51})$$

gdzie $d\bar{e}^P$ jest przyrostem efektywnych odkształceń plastycznych obliczonych następująco:

$$d\bar{e}^P = \sqrt{\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{ij}^P\dot{\varepsilon}_{ij}^P}, \quad (\text{A.52})$$

co z kolei można rozwinąć do postaci:

$$d\bar{e}^P = \left\{ \frac{1}{6} \left[(\dot{\epsilon}_{11}^P - \dot{\epsilon}_{22}^P)^2 + (\dot{\epsilon}_{22}^P - \dot{\epsilon}_{33}^P)^2 + (\dot{\epsilon}_{33}^P - \dot{\epsilon}_{11}^P)^2 \right] + (\dot{\epsilon}_{12}^P)^2 + (\dot{\epsilon}_{23}^P)^2 + (\dot{\epsilon}_{31}^P)^2 \right\}^{1/2}. \quad (\text{A.53})$$

Wykorzystując ponadto przedstawioną w równaniu (3.15) postać funkcji plastyczności Hubera–Misesa ostatecznie dochodzimy do równań:

$$\dot{\lambda} = \sqrt{3} \frac{d\bar{e}^P}{\sigma_y}, \quad (\text{A.54})$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \sqrt{3} \frac{d\bar{e}^P}{\sigma_y} s_{ij}. \quad (\text{A.55})$$

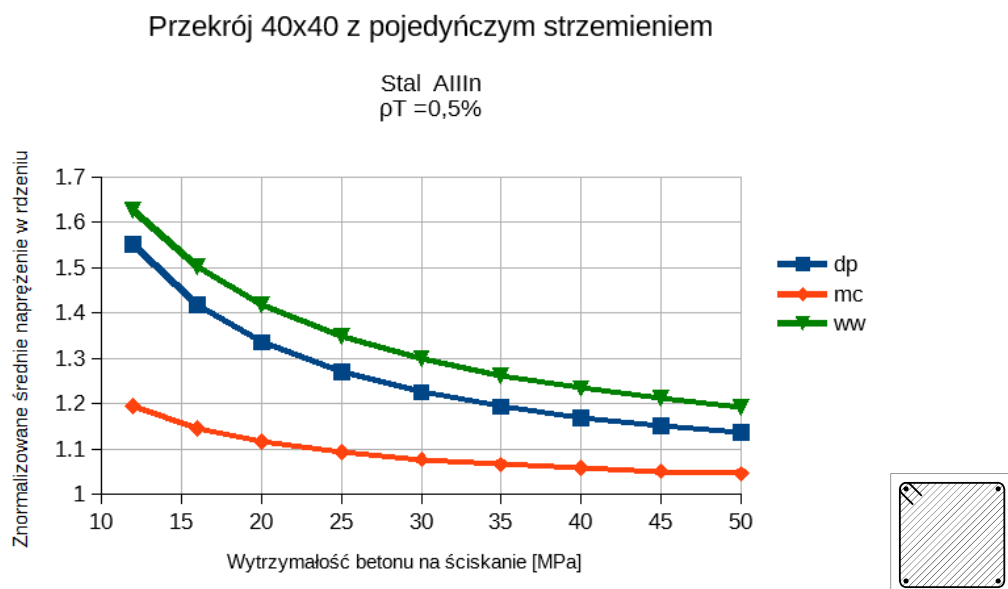
Powyższe rozważania opierały się na wykorzystaniu materiału liniowo sprężysto–idealnie plastycznego z warunkiem plastyczności Hubera–von Misesa–Hencky’ego (hipotezy opartej na energii odkształcenia postaciowego) oraz stowarzyszonego prawa płynięcia. Model taki bywa nazywany materiałem Prandtla–Reussa, stanowi najprostszy przypadek zadania sprężysto–plastycznego i w niniejszej pracy został wykorzystany przy modelowaniu zachowania stalowego zbrojenia poprzecznego.

A.4. Wpływ stałych materiałowych na efektywność skrępowania

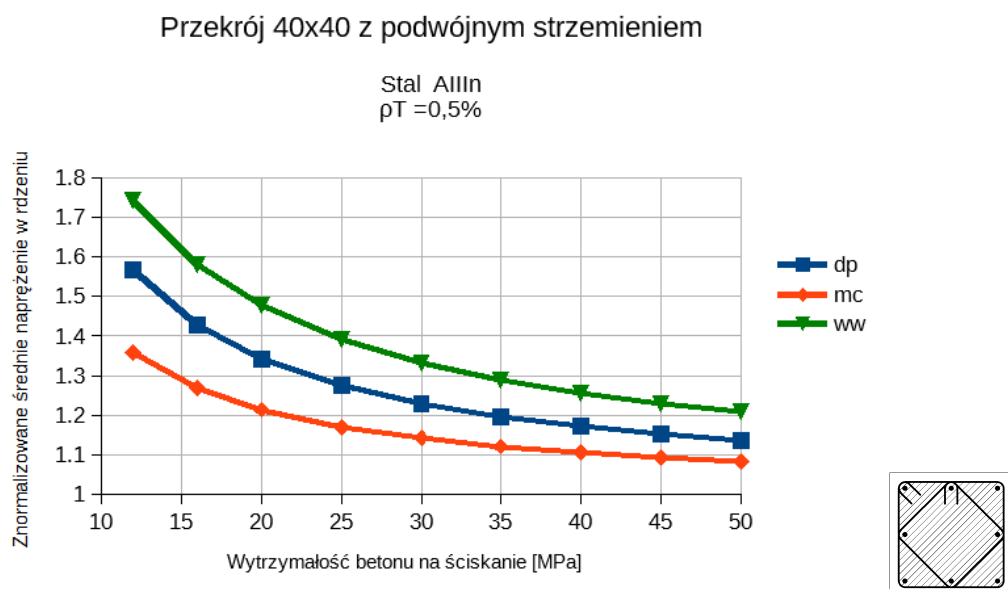
Wpływ wytrzymałości na ściskanie betonu

Rozważany jest wpływ wytrzymałości betonu na ściskanie na efektywność skrępowania. Należy zauważyć, że w tym punkcie skorelowano moduł Younga betonu z jego wytrzymałością tak, jak ma to miejsce w rzeczywistości. Do tego celu wykorzystano relacje zaproponowane przez normę PN-EN1992-1-1 [33], przedstawione w tabeli 3.1 w cytowanej pozycji. Wartości tak uzyskane nie odbiegają znacząco od propozycji przedstawionych w normie [2]. Dla sprawdzenia jak wytrzymałość betonu wpływa na końcowe rezultaty przy zniszczeniu w różnych stanach naprężenia, wykonano serie obliczeń o zróżnicowanej geometrii przekroju poprzecznego. Zestaw wybrano identycznie jak w pozostałych podrozdziałach, w których analizowano wpływ czynników niezmiennających bezpośrednio kształtu przekroju. Dokładniejszy opis i rysunki zamieszczono w podrozdziale poświęconym badaniu wpływu stopnia zbrojenia poprzecznego (punkt 5.4). W ramach serii modele różniły się właściwościami betonu w taki sposób, że każdy odpowiadał betonowi klasy od C12/15 do C50/60 według normy PN-EN1992-1-1, obejmując tym samym zakres betonów o zwykłej wytrzymałości. Dla każdego przekroju wykonano 3 serie obliczeń, przyjmując w każdej z nich inny model pracy betonu. Głównym porównywanym wynikiem była graniczna wartość naprężeń normalnych wzdłuż osi słupa. Poszukiwano związku między tą

wartością a wytrzymałością betonu na ściskanie. Wyniki obliczeń przedstawiono na poniższych wykresach na rys. A.2-??.



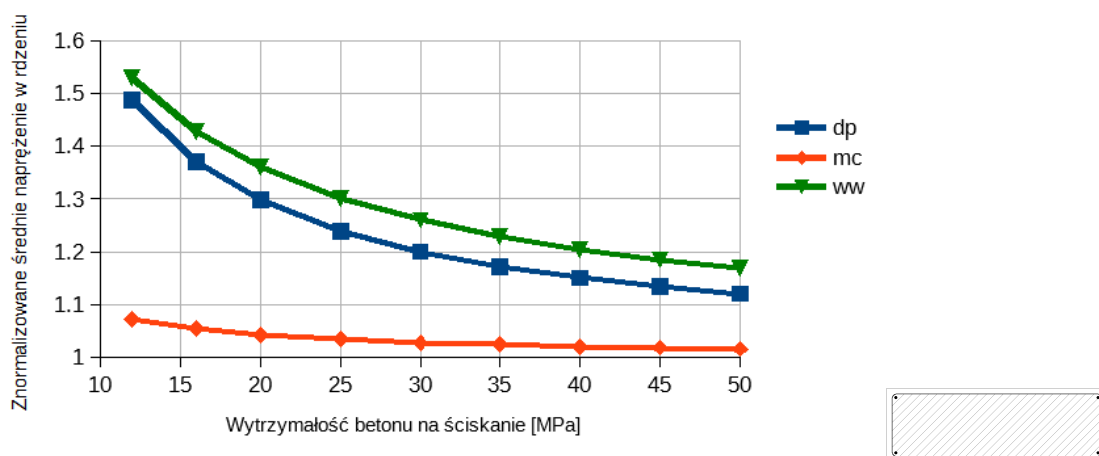
Rysunek A.2: Efektywność skrępowania w funkcji wytrzymałości betonu na ściskanie. Przekrój kwadratowy ze strzemieniem na obwodzie.



Rysunek A.3: Efektywność skrępowania w funkcji wytrzymałości betonu na ściskanie. Przekrój kwadratowy ze strzemionami na obwodzie i położonym diagonalnie.

Przekrój 120x40 z pojedynczym strzemieniem

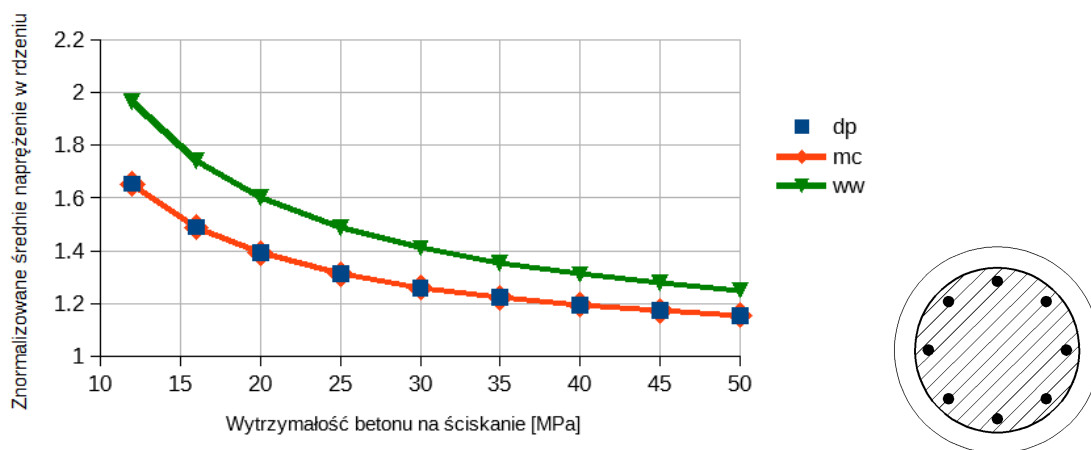
Stal AIIIIn
 $\rho_T = 0,5\%$



Rysunek A.4: Efektywność skrępowania w funkcji wytrzymałości betonu na ściskanie. Przekrój prostokątny ze strzemieniem na obwodzie.

Przekrój kołowy d30 z pojedynczym zwojem

Stal AIIIIn
 $\rho_T = 0,5\%$



Rysunek A.5: Efektywność skrępowania w funkcji wytrzymałości betonu na ściskanie. Przekrój kołowy ze zbrojeniem na obwodzie.

Poza wartościami uzyskanymi w poszczególnych punktach na wykresach umieszczono linie trendu, które pokazują przybliżony przebieg relacji. Można zauważyć, że dla różnych przekrojów zachowują się one podobnie. Ustalono, że widoczna jest najlepsza zgodność do funkcji o ogólnej postaci $F(\sigma_C) = 1 + A \frac{1}{\sigma_C^B}$, gdzie A oraz B są parametrami zależnymi od innych wielkości materiałowych, geometrycznych oraz przyjętego modelu

betonu. W tabeli A.1 zestawiono wartości stałych oraz całkowity błąd kwadratowy dopasowania, uzyskane metodą najmniejszych kwadratów.

Tablica A.1: Parametry korelacji szczytowych, znormalizowanych naprężeń w rdzeniu z wytrzymałością betonu na ściskanie.

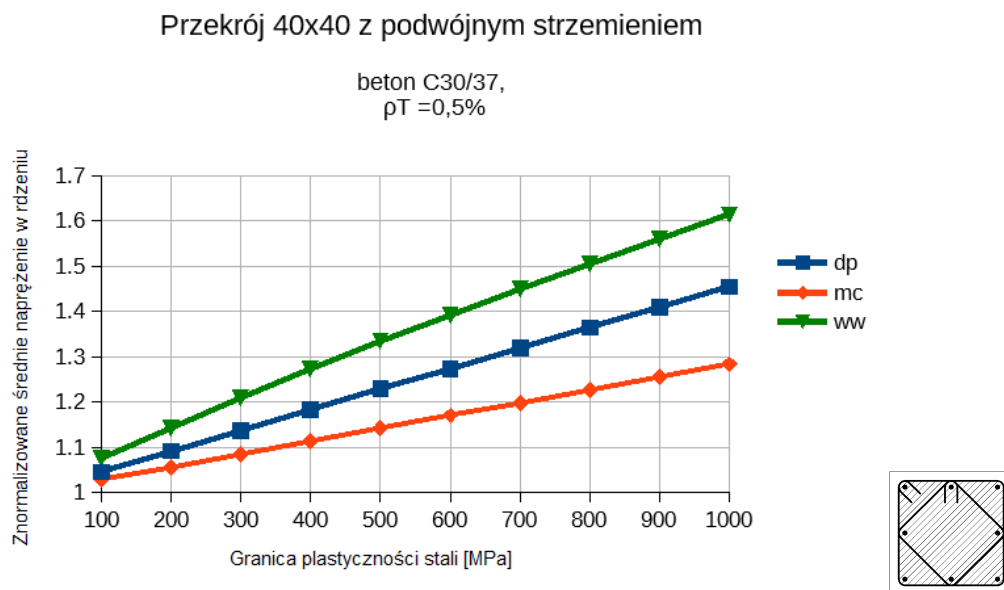
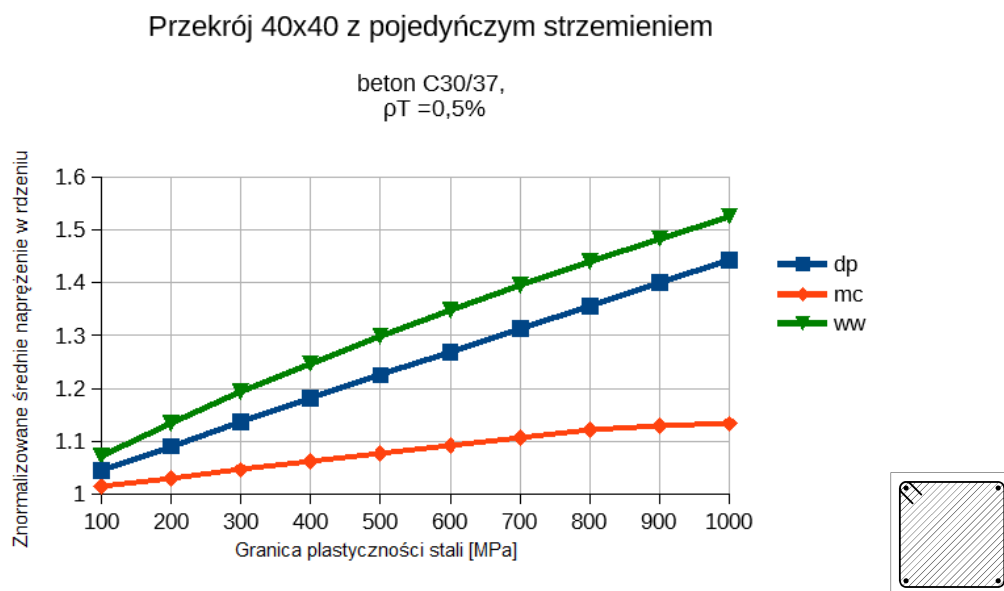
Prostokąt	A	B	$\sum R^2$
Drucker–Prager	5,54548445484766	0,976777300201799	$3,335344738 \cdot 10^{-6}$
Mohr–Coulomb	0,938714944766035	1,03169077366676	$1,189454384 \cdot 10^{-6}$
Willam–Warnke	3,80481820439359	0,790191604586467	$6,337982792 \cdot 10^{-5}$
Kwadrat z 1strz.	A	B	$\sum R^2$
Drucker–Prager	6,32101509139535	0,980796333661355	$2,431304502 \cdot 10^{-6}$
Mohr–Coulomb	2,44978046876776	1,01768047047548	$7,674483362 \cdot 10^{-7}$
Willam–Warnke	4,85363659452387	0,820379911099470	$5,526285096 \cdot 10^{-5}$
Kwadrat z 2strz.	A	B	$\sum R^2$
Drucker–Prager	6,74271995744223	0,995199957842955	$1,074558310 \cdot 10^{-6}$
Mohr–Coulomb	4,42568305869915	1,01211225205202	$4,930243940 \cdot 10^{-7}$
Willam–Warnke	6,73210727373993	0,884564930603340	$4,336802184 \cdot 10^{-5}$
Koło	A	B	$\sum R^2$
Drucker–Prager	7,98182370759057	1,00607607949819	$6,388192878 \cdot 10^{-7}$
Mohr–Coulomb	7,98254350148768	1,00636780202930	$4,527433660 \cdot 10^{-7}$
Willam–Warnke	10,0337744170018	0,939990074151348	$4,751575144 \cdot 10^{-5}$

Po dokładniejszym przyjrzeniu się zaprezentowanym rezultatom zauważymy, że całkowity błąd kwadratowy korelacji jest najniższy dla przekroju kołowego i rośnie we wszystkich modelach w miarę rozważania coraz mniej efektywnych przekrojów, czyli takich gdzie rozkład naprężeń poprzecznych jest coraz bardziej odległy od jednorodnego. Dodatkowo widać, że podobnie zachowuje się wartość parametru B , która dla modeli DP i MC początkowo jest bardzo zbliżona do 1, a przy kolejnych przekrojach oddala się od tej wartości maksymalnie o około 3%. Dużo większą zmienność obserwuje się dla tego parametru w przypadku modelu WW. Ponadto w tym modelu całkowity błąd kwadratowy jest co najmniej o rząd wielkości większy niż w pozostałych dwóch. Przyjęcie w tym modelu zależności w postaci funkcji $F(\sigma_C) = 1 + A \frac{1}{\sigma_C}$ zwiększa błąd korelacji o około 2 rzędy wielkości, ale dalej mieści się poniżej 10^{-3} we wszystkich rozważanych przypadkach.

Wpływ parametrów stali zbrojenia poprzecznego

Wpływ granicy plastyczności stali wykazuje istotną rolę w kształtowaniu nośności granicznej przekroju. Jest łatwe do przewidzenia, gdyż graniczne naprężenia kłępujące zależą od siły osiągananej w zbrojeniu poprzecznym, a ta (przyjmując najprostszy model) zależy od iloczynu stopnia zbrojenia poprzecznego ρ_T , pola przekroju A_c i granicy plastyczności stali f_y . Przewidywano, że rezultaty będą zbliżone jak w przypadku badania sprawdzającego zależność efektów skrępowania od stopnia zbrojenia poprzecznego.

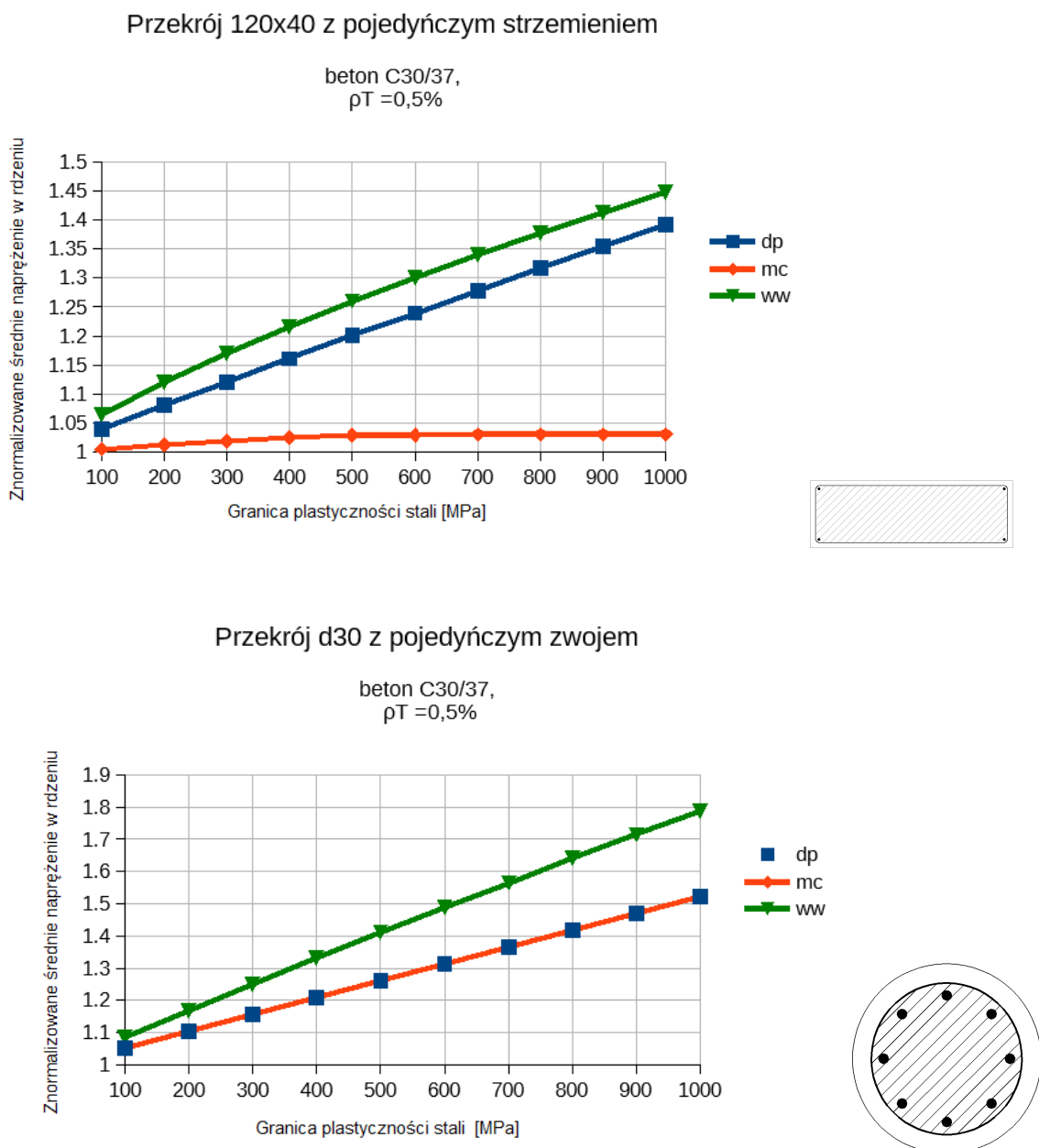
W pierwszym kroku, modele przygotowane identycznie jak opisane w poprzednim punkcie, tylko ze stałą wartością $f_c = 30$ MPa i stopniem zbrojenia poprzecznego $\rho_T = 0,5\%$. Podzielono je na serie, w których granica plastyczności stali wynosiła od $f_y = 100$ MPa do $f_y = 1000$ MPa ze skokiem co 100 MPa.



Rysunek A.6: Efektywność skrępowania w funkcji granicy plastyczności stali zbrojenia poprzecznego na rozciąganie, serie $\rho_T = 0,5\%$.

Po wstępnej analizie i zaobserwowaniu pewnych zjawisk zachodzących w przekrojach o silnie niejednorodnym rozkładzie naprężeń poprzecznych wykonano dodatkowe serie obliczeń przy stopniu zbrojenia $\rho_T = 2,0\%$ dla przekroju kwadratowego z pojedynczym strzemieniem i prostokątnego. Rezultaty w postaci wykresów zależności znormalizowanych

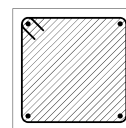
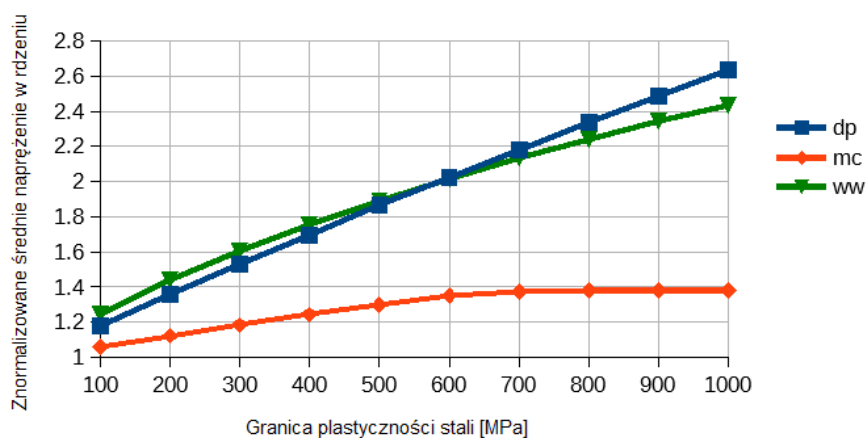
naprężeń osiowych w rdzeniu w funkcji wytrzymałości stali na rozciąganie przedstawiono na rysunkach A.6–A.8.



Rysunek A.7: Efektywność skrupowania w funkcji granicy plastyczności stali zbrojenia poprzecznego na rozciąganie, serie $\rho_T = 0,5\%$.

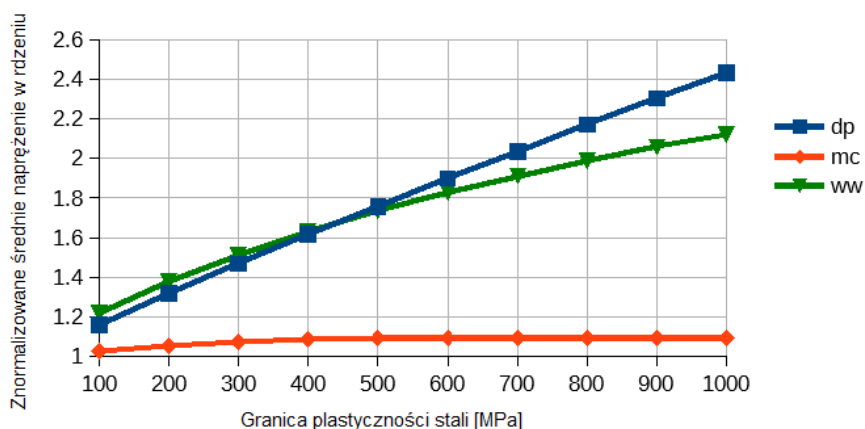
Przekrój 40x40 z pojedynczym strzemieniem

beton C30/37,
 $\rho_T = 2,0\%$



Przekrój 120x40 z pojedynczym strzemieniem

beton C30/37,
 $\rho_T = 2,0\%$



Rysunek A.8: Efektywność skrępowania w funkcji granicy plastyczności stali zbrojenia poprzecznego na rozciąganie, serie $\rho_T = 2,0\%$.

Należy zwrócić uwagę, że w zależności od ukształtowania przekroju poprzecznego poszczególne modele zachowują się w nieco odmienny sposób. W sytuacji gdy geometria rdzenia oraz uzwojenia zapewnia stosunkowo równomierny rozkład poprzecznych naprężeń normalnych (krępujących), co można utożsamiać z ograniczeniem lub nawet wyeliminowaniem obszarów nieefektywnie skrępowanych, wówczas różnice pomiędzy wynikami osiowych naprężeń granicznych z poszczególnych modeli są najmniejsze i łatwe do przewidzenia z uwagi na liniową zależność od badanego parametru. W pozostałych przypadkach liniowy charakter zależności utrzymuje się jedynie w przypadku wyników obliczeń uzyska-

nych przy wykorzystaniu modelu DP. Szczególnie istotne różnice widoczne są przy dużej sile zbrojenia poprzecznego¹. Wówczas stosując model MC w wynikach pola przemieszczeń zauważamy wydzielenie obszarów nieefektywnie skrępowanych, które przemieszczają się znacznie względem pozostałej części rdzenia. Nie pozwala to wykorzystać w pełni potencjału zastosowanego zbrojenia poprzecznego, które nie osiąga w takiej sytuacji granicy plastyczności podczas gdy przekrój poprzeczny ulega już znacznym odkształceniom plastycznym. Podobny mechanizm, choć przy większych odkształceniach i przy mniej wyraźnej granicy poślizgu pojawia się przy obliczeniach prowadzonych z wykorzystaniem modelu WW. Dodatkowo to właśnie przy tym modelu obserwuje się największe przemieszczenia poprzeczne, lecz wiązać to należy ze zjawiskiem dylatacji, które najsilniej daje o sobie znać z powodu zastosowania stowarzyszonego prawa płynięcia. Można przy okazji nadmienić, że na możliwość zniszczenia przekroju skrępowanego przed osiągnięciem naprężeń plastycznych w stali uzwojenia zwraca uwagę Nowakowski [75] w swojej rozprawie doktorskiej. Uwaga ta jest o tyle istotna, że znaczna część uproszczonych modeli określenia nośności przekroju skrępowanego (patrz tablice 2.1, 2.2, 2.3) opiera się na założeniu, że w zbrojeniu poprzecznym osiągnęte są naprężenia równe granicy plastyczności.

¹ Termin taki wykorzystywany jest czasem w literaturze do określenia iloczynu stopnia zbrojenia i wytrzymałości na rozciąganie zbrojenia, w tym przypadku zbrojenia poprzecznego.

Spis oznaczeń

Symbole łańskie wielkie	
A_c	– pole przekroju rdzenia betonowego,
A_g	– pole przekroju poprzecznego słupa betonowego,
$A, A_s, A_{sy}, A_{sz}, A_{sh}$	– pole przekroju zbrojenia poprzecznego,
A_{si}	– pole przekroju i-tego pręta zbrojenia poprzecznego,
$\mathbf{B}, \bar{\mathbf{B}}$	– macierz zależności odkształcenie – przemieszczenie,
C_{ijkl}	– tensor podatności,
C^0	– klasa elementu skończonego,
\mathbf{D}, \mathbf{D}^e	– macierz sprężystości,
\mathbf{D}^{ep}	– macierz sprężysto–plastyczna,
D_{ijkl}	– tensor sprężystości,
D_{MAX}	– maksymalny wymiar kruszywa,
E	– moduł Younga,
E_0	– początkowy moduł sprężystości (Younga) betonu,
E_c	– moduł sprężystości betonu,
E_p	– energia potencjalna odkształcenia,
E_s	– moduł sprężystości stali,
F	– funkcja plastyczności,
G	– funkcja potencjału plastycznego,
$G_{Kirchhoff}$	– moduł Kirchhoffa,
I_1, I_2, I_3	– niezmienniki tensora stanu naprężenia,
J_1, J_2, J_3	– niezmienniki dewiatora tensora stanu naprężenia,
K	– moduł Helmholtza,
L^n	– wielomian Lagrange’a n-tego stopnia,
N	– funkcja kształtu,
\mathbf{N}	– macierz funkcji kształtu,
P	– siła osiowa,
\mathbf{R}^i	– macierz rezyduów w i-tej iteracji,
$S, \partial\Omega$	– brzeg obszaru przekroju rdzenia,
V_0	– przestrzeń pól kinematycznie dopuszczalnych,
W^p	– praca odkształcenia plastycznego.
Symbole łańskie małe	
a_c, b_c, d_c	– wymiary rdzenia betonowego,
b_i	– odległość między prętami zbrojenia podłużnego,
c	– spójność,
d	– średnica, lub parametr zniszczenia,
$f_{ck}, f'_c, f'_{co}, f_c$	– wytrzymałość charakterystyczna betonu na ściskanie,
$f_{ck,c}, f_1, f'_{cc}, f_{cc}$	– wytrzymałość charakterystyczna betonu skrępowanego na ściskanie,
f_{cd}	– wytrzymałość obliczeniowa betonu na ściskanie,

f_{cb}	– wytrzymałość betonu na dwuosiowe równomierne ściskanie,
f_{ct}	– wytrzymałość betonu na jednoosiowe rozciąganie,
f_1, f_2	– poprzeczne naprężenia krępujące,
f_{ie}	– skuteczne naprężenia krępujące,
f_s	– naprężenia maksymalne w zbrojeniu poprzecznym, często odpowiadające granicy plastyczności,
f_y, f_{yt}	– granica plastyczności stali (zbrojenia poprzecznego),
n_α	– jednostkowy wektor normalny,
p, q, r	– niezmienniki stanu naprężenia,
r	– promień,
r_c	– promień w płaszczyźnie dewiatorowej odpowiadający ekstremalnym naprężeniom ściskającym,
r_t	– promień w płaszczyźnie dewiatorowej odpowiadający ekstremalnym naprężeniom rozciągającym,
r^i	– rezydua w i-tej iteracji,
s_c, s	– skok uzwojenia lub rozstaw strzemion,
s_{ij}	– dewiator tensora naprężenia,
s_1	– rozstaw prętów zbrojenia głównego,
t	– pseudo-czas,
u_{ij}, u_s, u, v	– przemieszczenia,
\mathbf{u}	– wektor przemieszczenia,
w_i	– waga i-tego punktu całkowania numerycznego.

Symbole greckie

δ_{ij}	– symbol Kronekera,
$\varepsilon, \varepsilon_{ij}$	– odkształcenia,
$\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p$	– składowa sprężysta i plastyczna tensora odkształcenia
ε_{c2}	– odkształcenie początku idealnej plastyczności betonu wg [33],
$\varepsilon_{c2,c}$	– odkształcenie rozpoczynające idealną plastyczność betonu skrępowanego wg [33],
ε_{cu2}	– odkształcenie graniczne betonu wg [33],
$\varepsilon_{cu2,c}$	– odkształcenie graniczne betonu skrępowanego wg [33],
ϑ	– parametr skośności,
θ	– kąt Lodego,
κ	– funkcja wzmocnienia/osłabienia,
κ_p	– parametr wzmocnienia plastycznego,
λ	– mnożnik plastyczny lub smukłość elementu,
ν	– stała Poissona,
ξ, ρ, θ	– współrzędne Haigha–Westergaarda, gdzie θ jest tożsama z kątem Lodego,
ξ, η	– współrzędna znormalizowana,
ρ	– stopień zbrojenia głównego,
ρ_c	– gęstość betonu,
ρ_T	– stopień zbrojenia poprzecznego,
ρ_{se}	– efektywny stopień zbrojenia poprzecznego,
σ, σ_{ij}	– naprężenia,
$\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}$	– macierz / wektor naprężenia,
$\boldsymbol{\sigma}_0$	– wektor naprężeń wywołanych wymuszonym odkształceniem,
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	– wartości naprężeń głównych,

- σ_B – wytrzymałość (betonu) na dwuosiowe równomierne ściskanie,
- σ_C – wytrzymałość (betonu) na jednoosiowe ściskanie,
- σ_R – wytrzymałość (betonu) na jednoosiowe rozciąganie,
- σ_T – poprzeczne naprężenia krępujące,
- τ – parametr czasu relaksacji,
- ϕ – kąt tarcia wewnętrznego lub średnica,
- ψ – kąt dylatacji,
- ω_c – moc zbrojenia poprzecznego,
- Ω – obszar przekroju słupa.

Spis rysunków

2.1	Znormalizowana wytrzymałość betonu skrępowanego na ściskanie wg [33].	12
2.2	Znormalizowana wytrzymałość betonu skrępowanego na ściskanie wg [51].	13
2.3	Przekroje badane w pracy [111].	27
3.1	Powierzchnia plastyczna – model Rankine’a.	44
3.2	Powierzchnia plastyczna – model Treski.	45
3.3	Powierzchnia plastyczna – model Hubera.	46
3.4	Powierzchnia plastyczna – model Mohra–Coulomba.	47
3.5	Powierzchnia plastyczna – model Druckera–Pragera.	48
3.6	Powierzchnia plastyczna – model Willama–Warnkego.	50
3.7	Dwuwymiarowa ilustracja warunku plastyczności i prawa płynięcia. Przedstawiono wykresy funkcji plastyczności F oraz potencjału plastyczności G określonej dla uplastycznienia w dowolnym punkcie A oznaczonym na rysunku. Kierunek przyrostu odkształceń plastycznych $d\varepsilon^P$ jest prostopadły do G w punkcie A	54
3.8	Przyrost odkształceń plastycznych w modelu Druckera–Pragera ze stowarzyszonym prawem płynięcia. W przypadku stowarzyszonym ($d\varepsilon^P$ pozostaje prostopadły do powierzchni plastycznej) obserwujemy składową równoległą do osi hydrostatycznej, która odpowiada za zmianę objętości dV^P	54
4.1	Element prętowy dwuwęzłowy.	61
4.2	Element prętowy dwuwęzłowy znormalizowany, współrzędne naturalne.	61
4.3	Element prętowy trójwęzłowy.	64
4.4	Element prętowy trójwęzłowy znormalizowany, współrzędne lokalne.	64
4.5	Geometria zadania testowego. Przedstawiono 5 kolejnych podziałów na elementy.	67
4.6	Zbieżność energii odkształcenia wraz ze wzrostem gęstości podziału na elementy.	67
4.7	Wartości siły normalnej obliczone przy różnych podziałach na elementy.	68
4.8	Element trójkątny o 3 węzłach klasy C^0	69
4.9	Znormalizowany element trójkątny trzywęzłowy klasy C^0 z oznaczeniem trójkątów służących definicji współrzędnych powierzchniowych dowolnego punktu P	70
4.10	Element trójkątny 6-cio węzłowy.	71
4.11	Znormalizowany element trójkątny sześciowęzłowy klasy C^0	72
4.12	Ślad powierzchni plastycznej Willama–Warnkego i Druckera–Pragera na płaszczyźnie dewiatorowej.	80
4.13	Algorytm ogólny przygotowania modeli.	81
5.1	Przekroje poprzeczne próbek za [128, 127].	84

5.2	Siatki wykorzystane przy prowadzonych symulacjach.	85
5.3	Wykresy średnie naprężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii T.	86
5.4	Wykresy średnie naprężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii 4S.	87
5.5	Wykresy średnie naprężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii 4S.	88
5.6	Wykresy średnie naprężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii 5S.	89
5.7	Wykresy średnie naprężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii 5S.	90
5.8	Wykresy średnie naprężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii ST.	91
5.9	Wykresy średnie naprężenie w rdzeniu–odkształcenie dla próbek serii ST.	92
5.10	Rozkład naprężeń osiowych w modelu próbki 5S1. Na wstępnym etapie wykorzystano siatkę wraz z otuliną rdzenia, widoczne są naprężenia rozciągające na granicy tych obszarów.	93
5.11	Wizualizacja przestrzeni naprężeń z zaznaczoną osią hydrostatyczną (zielona) i płaszczyznami dewiatorowymi.	95
5.12	Fazy pracy przekroju na przykładzie przekroju kwadratowego zbrojonego strzemionami prostymi.	96
5.13	Przekroje poprzeczne. Analizowano zakreskowany obszar rdzenia.	98
5.14	Efektywność skrępowania w funkcji stopnia zbrojenia poprzecznego – przekroje kwadratowe.	99
5.15	Efektywność skrępowania w funkcji stopnia zbrojenia poprzecznego – przekrój prostokątny i kołowy.	100
5.16	Wpływ modelu obliczeniowego na pole przemieszczenia i naprężenia w stanie pełnego uplastycznienia rdzenia.	102
5.17	Wpływ modelu obliczeniowego na pole przemieszczenia i naprężenia w stanie pełnego uplastycznienia rdzenia.	103
5.18	Wpływ modelu obliczeniowego na pole przemieszczenia i naprężenia w stanie pełnego uplastycznienia rdzenia.	104
5.19	Schemat kierunku przyrostu odkształceń plastycznych rzutowanych na płaszczyznę dewiatorową. Opis w tekście.	105
5.20	Naprężenia znormalizowane w funkcji stosunku boków rdzenia, wariant I – stałe pole przekroju zbrojenia poprzecznego.	106
5.21	Naprężenia znormalizowane w funkcji stosunku boków rdzenia, wariant II – stały stopień zbrojenia poprzecznego.	108
5.22	Rozkład naprężeń poprzecznych w stanie granicznym. Obliczenia z wykorzystaniem modelu Mohra–Coulomba.	109
5.23	Stopień zbrojenia poprzecznego w funkcji stosunku boków prostokąta. Przyjęto $A_{sT} = 1$; $a = 1$; $c = 0,2a$	110
5.24	Schemat efektywnie skrępowanego obszaru przekroju prostokątnego określony wg propozycji Sheikha [111].	110
5.25	Przekroje poprzeczne. Analizowano zakreskowany obszar rdzenia.	112
5.26	Przekroje poprzeczne. Analizowano zakreskowany obszar rdzenia.	113
5.27	Zastosowane siatki obliczeniowe.	114

5.28	Zastosowane siatki obliczeniowe.	115
5.29	Rozszerzony rdzeń przekroju ze zbrojeniem zwojem i szpilkami w narożach.	116
5.30	Naprężenia główne. Stan pełnego uplastycznienia rdzenia, skrócenie podłużne $\varepsilon_z = 2\text{‰}$, model MC.	121
5.31	Naprężenia główne. Stan pełnego uplastycznienia rdzenia, skrócenie podłużne $\varepsilon_z = 2\text{‰}$, model MC.	122
5.32	Naprężenia główne. Stan pełnego uplastycznienia rdzenia, skrócenie podłużne $\varepsilon_z = 2\text{‰}$, model MC.	123
5.33	Naprężenia główne. Stan pełnego uplastycznienia rdzenia, skrócenie podłużne $\varepsilon_z = 2\text{‰}$, model MC.	124
5.34	Naprężenia główne. Stan pełnego uplastycznienia rdzenia, skrócenie podłużne $\varepsilon_z = 2\text{‰}$, model MC.	125
5.35	Naprężenia główne. Stan pełnego uplastycznienia rdzenia, skrócenie podłużne $\varepsilon_z = 2\text{‰}$, model MC.	126
5.36	Znormalizowane naprężenia w rdzeniu w stanie granicznym, w funkcji stosunku pola przekroju pręta zwojów narożnych do pola przekroju pręta zwoju głównego, $\rho_T = 0,5\%$, model DP.	127
5.37	Rysunki rozważanych przekrojów. Zakreskowano obszar rdzenia poddany analizie numerycznej. Zbrojenie podłużne nie było ujęte w modelu obliczeniowym.	129
5.38	Znormalizowane naprężenie osiowe wewnątrz rdzenia w funkcji skrócenia podłużnego. Zestawiono wyniki dla danego przekroju odpowiadające trzem modelom betonu. . .	130
5.39	Znormalizowane naprężenie osiowe wewnątrz rdzenia w funkcji skrócenia podłużnego. Zestawiono wyniki dla danego przekroju odpowiadające trzem modelom betonu. . .	131
5.40	Porównanie efektywności skrępowania rdzenia przy różnych modelach materiałowych dla betonu.	131
5.41	Porównanie efektywności skrępowania rdzenia przy różnych modelach materiałowych dla betonu.	132
5.42	Naprężenia główne, pierścień 600/400 mm, $\rho_T = 0,5\%$, model DP.	136
5.43	Naprężenia główne, pierścień 600/400 mm, $\rho_T = 2,0\%$, model DP.	137
5.44	Naprężenia główne, pierścień 600/200 mm, $\rho_T = 0,5\%$, model DP.	138
5.45	Naprężenia główne, przekrój kwadratowy z otworem, $\rho_T = 0,5\%$, model DP.	139
A.1	Schemat obrazujący warunek ortogonalności odkształceń plastycznych dla materiału Prandtla–Reussa. Ograniczeniem przestrzeni naprężeń plastycznie dopuszczalnych jest warunek Hubera. Przyrosty odkształceń plastycznych są prostopadłe do osi hydrostatycznej, więc nie wywołują zmiany objętości.	154
A.2	Efektywność skrępowania w funkcji wytrzymałości betonu na ściskanie. Przekrój kwadratowy ze strzemieniem na obwodzie.	157
A.3	Efektywność skrępowania w funkcji wytrzymałości betonu na ściskanie. Przekrój kwadratowy ze strzemionami na obwodzie i położonym diagonalnie.	157
A.4	Efektywność skrępowania w funkcji wytrzymałości betonu na ściskanie. Przekrój prostokątny ze strzemieniem na obwodzie.	158

A.5	Efektywność skrepowania w funkcji wytrzymałości betonu na ściskanie. Przekrój kołowy ze zbrojeniem na obwodzie.	158
A.6	Efektywność skrepowania w funkcji granicy plastyczności stali zbrojenia poprzecznego na rozciąganie, serie $\rho_T = 0,5\%$	160
A.7	Efektywność skrepowania w funkcji granicy plastyczności stali zbrojenia poprzecznego na rozciąganie, serie $\rho_T = 0,5\%$	161
A.8	Efektywność skrepowania w funkcji granicy plastyczności stali zbrojenia poprzecznego na rozciąganie, serie $\rho_T = 2,0\%$	162

Spis tablic

2.1	Wybrane metody określania nośności przekroju uzwojonego.	21
2.2	Wybrane metody określania nośności przekroju uzwojonego.	22
2.3	Wybrane metody określania nośności przekroju uzwojonego.	23
2.4	Wybrane wyniki badań okrągłych słupów z uzwojeniem.	24
5.1	Podstawowe dane badanych próbek, opisanych przez [128].	84
5.2	Wyniki obliczeń, różne proporcje boków przekrojów prostokątnych.	107
5.3	Syntetyczne wyniki obliczeń – model Druckera–Pragera.	118
5.4	Syntetyczne wyniki obliczeń – model Mohra–Coulomba.	119
5.5	Syntetyczne wyniki obliczeń – model Willama–Warnkego.	120
5.6	Syntetyczne wyniki symulacji.	133
5.7	Średnie wartości osiowego naprężenia granicznego w słupach z otworami.	135
5.8	Wybrane metody określania nośności przekroju uzwojonego.	143
A.1	Parametry korelacji szczytowych, znormalizowanych naprężeń w rdzeniu z wytrzymałością betonu na ściskanie.	159

Bibliografia

- [1] ACI Committee 318. *318-08: Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*. 2007.
- [2] ACI Committee 318. *Building Code Requirements for Structural Concrete*, volume 2007. 2014.
- [3] S. H. Ahmad and S. P. Shah. Complete triaxial stress-strain curves for concrete. *ASCE J Struct Div*, 1982.
- [4] G. Arslan. Mesh size effect on load carrying capacity of the reinforced concrete beams without stirrups by using Drucker–Prager cracking concrete fracture criteria. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 3:34–42, 2004.
- [5] G. Arslan. Sensitivity study of the Drucker–Prager modeling parameters in the prediction of the nonlinear response of reinforced concrete structures. *Materials and Design*, 2007.
- [6] G. Arslan and M. Hacısalihoglu. Nonlinear analysis of RC columns using the Drucker–Prager model. *Journal of Civil Engineering and Management*, 19(1):69–77, 2013.
- [7] T. Asakawa, R. Ishimaru, H. Yoshida, and Y. Suenga. Study on shear capacity of RC columns confined with rectangular steel pipe used for the precast concrete wall structure reducing to columns at the ground storey. *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, 2017.
- [8] ASM. *Vol 1: Properties and Selection: Irons, Steels, and High-Performance Alloys*. 1990.
- [9] ASTM C 597-02. Pulse Velocity Through Concrete. *United States: American Society for Testing and Material.*, 2003.
- [10] M. M. Attard and S. Setunge. Stress–strain relationship of confined and unconfined concrete. *ACI Materials Journal*, 1996.
- [11] A. Z. Awang. *Stress-strain behavior of high-strength concrete with lateral pre-tensioning confinement*. Phd thesis, Universiti Teknologi Malaysia, 2013.
- [12] Badania betonu – Część 4. PN-EN 12504-4:2005 Badania betonu – Część 4: Oznaczenie prędkości fali ultradźwiękowej. *Polski Komitet Normalizacyjny*, 2005.
- [13] Y. Bai and T. Wierzbicki. Application of extended Mohr–Coulomb criterion to ductile fracture. *International Journal of Fracture*, 161(1):1–20, 2010.
- [14] H. C. Biscaia, C. Chastre, and M. A. G. Silva. Bond-slip model for FRP-to-concrete bonded joints under external compression. *Composites Part B: Engineering*, 80:246–259, oct 2015.
- [15] B. Bousalem and N. Chikh. Development of a confined model for rectangular ordinary reinforced concrete columns. *Materials and Structures/Materiaux et Constructions*, 40(6):605–613, 2007.

- [16] B. Bresler and K. S. Pister. Strength of concrete under combined stresses. *ACI Journal Proceedings*, 55(9):321–345, 1958.
- [17] J. J. Brooks. Elasticity of Concrete. In *Concrete and Masonry Movements*, pages 61–93. 2014.
- [18] W. Burzyński. Über die Anstrengungshypothesen. *Schweizerische Bauzeitung*, 94(21):259–262, 1929.
- [19] W. Chen. *Plasticity in Reinforced Concrete*. McGraw-Hill Book Company, New York, 2007.
- [20] W. F. Chen and E. Mizuno. Nonlinear analysis in soil mechanics: Theory and Implementation. In *Elsevier: Amsterdam*. 1990.
- [21] A. Considere. *Resistance a'la compression du beton arme et du beton frette*. Le Genie Civil, Paryż, 1903.
- [22] D. Cusson and P. Paultre. High-strength concrete columns confined by rectangular ties. *Journal of Structural Engineering (United States)*, 1994.
- [23] D. Cusson and P. Paultre. Stress-strain model for confined high-strength concrete. *Journal of Structural Engineering (United States)*, 1995.
- [24] C.-A. de Coulomb. Essai sur une application des regles des maximis et minimis a quelques problemes de statique relatifs, a la architecture. *Mem. Acad. Roy. Div. Sav.*, 1776.
- [25] E. A. De Souza Neto, D. Perić, and D. R. Owen. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. Wiley, 2008.
- [26] B. Doran, H. Koksal, Z. Polat, and C. Karakoc. The Use of "Drucker–Prager Criterion" in the Analysis of Reinforced Concrete Members by Finite Elements. *Turkish Chamber of Civil Engineers*, 9(2):1617–1625, 1998.
- [27] D. C. Drucker. A Definition of Stable Inelastic Material. *Journal of Applied Mechanics*, 1959.
- [28] D. C. Drucker and W. Prager. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, 10(2):157–165, 1952.
- [29] R. Eid, A. N. Dancygier, and P. Paultre. Stress-strain curve for concrete in circular columns based on elastoplastic analysis. *Materials and Structures/Materiaux et Constructions*, 43(1-2):63–79, 2010.
- [30] K. M. El-Dash and S. H. Ahmad. A model for the stress-strain relationship of rectangular confined normal and high strength concrete columns. *Materials and Structures*, 27(10):572–579, 1994.
- [31] B. Erzar and P. Forquin. Analysis and modelling of the cohesion strength of concrete at high strain-rates. *International Journal of Solids and Structures*, 51(14):2559–2574, 2014.
- [32] G. Etse and K. Willam. Fracture energy formulation for inelastic behavior of plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 1994.
- [33] Euro Code 2. Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków. *Polski Komitet Normalizacyjny*, 2008.
- [34] A. Fafitis and S. P. Shah. Predictions of ultimate behavior of confined columns subjected to large deformations. *Journal of the American Concrete Institute*, 1985.

- [35] N. Ferhouné and J. Zeghiche. Numerical analysis of cold-formed steel welded tube filled with concrete made of crystallized slag aggregate. *Mechanics and Industry*, 2015.
- [36] P. Folino and G. Etse. Validation of performance-dependent failure criterion for concretes. *ACI Materials Journal*, 108(3):261–269, 2011.
- [37] A. Freudenthal. *Verbundstützen für hohe Lasten*. Ernst und Sohn, Berlin, 1933.
- [38] Y. Fujita, R. Ishimaru, S. Hanai, and Y. Suenga. Study on Internal Friction Angle and Tensile Strength. *Proceedings of FRAMCOS-3*, (1994):325–334, 1998.
- [39] P. Fuschi, M. Dutko, D. Perić, and D. R. Owen. On numerical integration of the five-parameter model for concrete. *Computers and Structures*, 1994.
- [40] T. Gajewski and T. Garbowski. Calibration of concrete parameters based on digital image correlation and inverse analysis. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 14(1):170–180, 2014.
- [41] T. Godycki-Ćwirko. *Mechanika Betonu*. Arkady, Warszawa, 1982.
- [42] P. Grassl, D. Xenos, U. Nyström, R. Rempling, and K. Gylltoft. CDPM2: A damage-plasticity approach to modelling the failure of concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 50(24):3805–3816, 2013.
- [43] L. H. Han, W. Li, and R. Bjorhovde. Developments and advanced applications of concrete-filled steel tubular (CFST) structures: Members. *Journal of Constructional Steel Research*, 100:211–228, 2014.
- [44] P. Havlásek, M. Jirásek, and Z. Bittnar. Modeling of precast columns with innovative multi-spiral reinforcement. pages 2301–2307, 2019.
- [45] H. Hencky. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 4(4):323–334, 1924.
- [46] J. Hoshikuma, K. Kawashima, K. Nagaya, and A. W. Taylor. Stress-strain model for confined reinforced concrete in bridge piers. *Journal of Structural Engineering*, 1997.
- [47] M. T. Huber. Właściwa praca odkształcenia jako miara wytrzymałości materiału. *Towarzystwo Politechniczne Lwów*, 1904.
- [48] I. Imran and S. J. Pantazopoulou. Plasticity model for concrete under triaxial compressions. *Journal of Engineering Mechanics*, 2001.
- [49] M. Jirásek and Z. P. Bažant. *Inelastic analysis of structures*. John Wiley and Sons, West Sussex, 2002.
- [50] Joint Committee on Concrete and Reinforced Concrete. Report of the Committee on Concrete and Reinforced Concrete. Technical Report 2, American Society of Civil Engineers, Detroit, 1910.
- [51] Joost Walvern and Agnieszka Bigaj-van Vliet and other, editor. *Model Code 2010, final drafts*. Ernst & Sohn, 2012.
- [52] A. I. Karabinis and P. D. Kioussis. Effects of confinement on concrete columns: Plasticity approach. *Journal of Structural Engineering (United States)*, 1994.
- [53] P. D. Kioussis, T. C. Rousakis, and A. I. Karabinis. Theory of plasticity for the modeling

- of rectangular FRP confined concrete columns. In *Proceedings of the fib Symposium 2003: Concrete Structures in Seismic Regions*, 2003.
- [54] P. Korzeniowski. *Żelbetowe słupy uzwojone. Badania i teoria*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 2000.
- [55] A. Kuryłło. Nowe doświadczenia ze słupami uzwojonymi. *Inżynieria i Budownictwo*, 11, 1952.
- [56] A. Kuryłło. *Studium nad słupami uzwojonymi*. Budownictwo i Architektura, Warszawa, 1954.
- [57] J. Lee and G. L. Fenves. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998.
- [58] G. P. Lignola, A. Prota, G. Manfredi, and E. Cosenza. Modeling of RC wall-like columns FRP confinement. (July 2016), 2011.
- [59] W. Lode. Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. *Zeitschrift für Physik*, 36(11-12):913–939, 1926.
- [60] W. P. Lokuge, J. G. Sanjayan, and S. Setunge. Stress-strain model for laterally confined concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 2005.
- [61] V. A. Lubarda, D. Krajcinovic, and S. Mastilovic. Damage model for brittle elastic solids with unequal tensile and compressive strengths. *Engineering Fracture Mechanics*, 49(5):681–697, 1994.
- [62] J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, and E. Oñate. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 25(3):299–326, 1989.
- [63] T. Majewski, J. Bobiński, and J. Tejchman. FE analysis of failure behaviour of reinforced concrete columns under eccentric compression. *Engineering Structures*, 30(2):300–317, 2008.
- [64] J. B. Mander, M. J. Priestley, and R. Park. Theoretical stress-strain model for confined concrete. *Journal of Structural Engineering (United States)*, 1988.
- [65] I. Marzec and J. Tejchman. Computational modelling of concrete behaviour under static and dynamic conditions. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 61(1):85–96, 2013.
- [66] I. Marzec, J. Tejchman, and A. Winnicki. Computational simulations of concrete behaviour under dynamic conditions using elasto-visco-plastic model with non-local softening. *Computers and Concrete*, 15(4):515–545, 2015.
- [67] P. Menetrey and K. J. Willam. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *ACI Structural Journal*, 1995.
- [68] A. Mirmiran, K. Zagers, and W. Yuan. Nonlinear finite element modeling of concrete confined by fiber composites. *Finite elements in analysis and design*, 35(1):79–96, 2000.
- [69] H. Moghaddam, M. Samadi, and K. Pilakoutas. Compressive behavior of concrete actively confined by metal strips, part B: Analysis. *Materials and Structures/Materiaux et Constructions*, 43(10):1383–1396, 2010.
- [70] H. Moghaddam, M. Samadi, K. Pilakoutas, and S. Mohebbi. Axial compressive behavior

- of concrete actively confined by metal strips; Part A: Experimental study. *Materials and Structures/Materiaux et Constructions*, 43(10):1369–1381, 2010.
- [71] E. Mörsch. *Die Bemessung im Eisenbetonbau aufgrund der Bestimmungen des D.A.f.Stb., DIN 1045 vom Jahre 1943*. Verlag Konrad Witter, Stuttgart, 5 edition, 1950.
- [72] K. Müller. *Beitrag zur Behandlung der Tragfähigkeit wendelbewehrter Stahlbetonsäulen*. Diss. Tech. Univ., Monachium, 1975.
- [73] K. Newman and J. Newman. Failure theories and design criteria for plain concrete. In *Structure, Solid Mechanics and Engineering Design: the Proceedings of the Southampton 1969 Civil Engineering Materials Conference*, 1969.
- [74] A. S. Nowak. Calibration of LFRD Bridge Code. *Journal of Structural Engineering*, 121(11):1691–1699, 1997.
- [75] A. B. Nowakowski. *Nośność żelbetowych słupów uzwojonych ściskanych osiowo i mimośrodowo*. PhD thesis, Politechnika Łódzka, 1983.
- [76] S. Oller, E. Oñate, J. Oliver, and J. Lubliner. Finite element nonlinear analysis of concrete structures using a "plastic-damage model". *Engineering Fracture Mechanics*, 1990.
- [77] W. Olszak. Z zagadnień teorii elementów uzwojonych w świetle reologicznych własności materiałów. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, VI(2), 1954.
- [78] W. Olszak. Zagadnienia teorii elementów uzwojonych cz. I i II. *Archiwum Inżynierii Lądowej*, V(2), 1960.
- [79] W. Omar, A. Z. Awang, M. C. Khun, and M. Liang. The design of short SSTT-confined circular HSC columns. *International Journal of Research in Engineering and Technology*, 2013.
- [80] E. Oñate, S. Oller, J. Oliver, and J. Lubliner. A constitutive model for cracking of concrete based on the incremental theory of plasticity. *Engineering Computations*, 5(4):309–319, 1988.
- [81] N. S. Ottosen. A failure criterion for concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, (103):527–535, 1977.
- [82] E. Öztekin, S. Pul, and M. Hüsem. Experimental determination of Drucker-Prager yield criterion parameters for normal and high strength concretes under triaxial compression. *Construction and Building Materials*, 112:725–732, June 2016.
- [83] R. Park and T. Pauley. *Reinforcement Concrete Structures*. John Wiley and Sons, Nowy Jork, 1975.
- [84] R. Park, M. J. Priestley, and W. D. Gill. Ductility of square-confined concrete columns. *ASCE J Struct Div*, 1982.
- [85] T. Park and K. Chung. Non-associated flow rule with symmetric stiffness modulus for isotropic-kinematic hardening and its application for earing in circular cup drawing. *International Journal of Solids and Structures*, 49(25):3582–3593, 2012.
- [86] J. Podgórski. General failure criterion for isotropic media. *Journal of Engineering Mechanics*, 1985.

- [87] Polski Komitet Normalizacyjny. PN-B 03264:1976. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone - Obliczenia statyczne i projektowanie. *Polski Komitet Normalizacyjny*, 1976.
- [88] M. J. Priestley, R. Park, and R. T. Potangaroa. Ductility of spirally-confined concrete columns. *ASCE J Struct Div*, 1981.
- [89] S. Pul, A. Ghaffari, E. Öztekin, M. Hüsem, and S. Demir. Experimental determination of cohesion & internal friction angle on conventional concretes. *ACI Structural Journal*, 114(3):407–416, 2017.
- [90] H. Rafiai. New empirical polyaxial criterion for rock strength. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 48(6):922–931, 2011.
- [91] W. Rankine. On the stability of loose earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 147, 1857.
- [92] S. Razvi. *Confinement of Normal and High-Strengt Concrete of Columns*. PhD thesis, Ottawa, 1995.
- [93] S. Razvi and M. Saatcioglu. Confinement model for high-strength concrete. *Journal of Structural Engineering*, 1999.
- [94] S. R. Razvi and M. Saatcioglu. Confinement of reinforced concrete columns with welded wire fabric. *ACI Journal Proceedings*, 86:615–623, 1989.
- [95] S. R. Razvi and M. Saatcioglu. Test of hight-strength concrete columns under concentric loading. Technical Report OCEERC 96-03, Ottawa Carleton Earthquake Engineering Research Centre, Ottawa, 1996.
- [96] F. Richart, A. Brandtzaeg, and R. L. Brown. A Study of the Failure of Concrete under Combined Compressive Stresses. *University of Illinois Bulletin*, pages 1–104, 1928.
- [97] F. Richart, A. Brandtzaeg, and R. L. Brown. Failure of plain and spirally reinforced concrete in compression. *University of Illinois Bulletin*, 1929.
- [98] F. E. Richart and R. L. Brown. An Investigation of Reinforced Concrete Columns: A Report of an Investigation. (I):102, 1934.
- [99] K. A. Riederer. Assessment of Confinement Models for Reinforced Concrete Columns Subjected To Seismic Loading. *MSc Thesis, Department of Civil Engineering, The University of British Columbia, BC, Canada*, (December), 2006.
- [100] P. Rochette and P. Labossie're. A plasticity approach for concrete columns confined with composite materials. In *Proceedings Advanced Composite Materials in Bridges and Structures, CSCE*, pages 359–366, 1996.
- [101] T. C. Rousakis, A. I. Karabinis, and P. D. Kiouisis. FRP-confined concrete members: Axial compression experiments and plasticity modelling. *Engineering Structures*, 29(7):1343–1353, 2007.
- [102] H. Rüsck and S. Söckl. *Versuche an wendebewehrten Stahlbetonsäulen unter kurz und langfristig wirkenden zentrischen Lasten. D.A.f.Stb. H.205*. 1969.
- [103] M. Saatcioglu and S. R. Razvi. Strength and ductility of confined concrete. *Journal of Structural Engineering (United States)*, 1992.
- [104] P. Sadeghian, A. R. Rahai, and M. R. Ehsani. Numerical modeling of concrete cylin-

- ders confined with CFRP composites. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 27(12):1309–1321, 2008.
- [105] A. K. Samani and M. M. Attard. A stress-strain model for uniaxial and confined concrete under compression. *Engineering Structures*, 41:335–349, 2012.
- [106] U. K. Sharma, P. Bhargava, and S. K. Kaushik. Behavior of confined high strength concrete columns under axial compression. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 3(2):267–281, 2005.
- [107] I. A. Shehata, L. A. Carneiro, and L. C. Shehata. Strength of short concrete columns confined with CFRP sheets. *Materials and Structures/Materiaux et Constructions*, 2002.
- [108] S. Sheikh and S. M. Uzumeri. Analytical model for concrete confinement in tied columns. *Journal of the Structural Division*, 1982.
- [109] S. Sheikh and S. M. Uzumeri. Analytical model for concrete confinement in tied columns. *Journal of the Structural Division*, 1982.
- [110] S. A. Sheikh and M. T. Toklucu. Reinforced concrete columns confined by circular spirals and hoops. *ACI Structural Journal*, (September), 1993.
- [111] S. A. Sheikh and S. M. Uzumeri. Strength and ductility of tied concrete columns. *Journal of the Structural Division*, 106(ST5):1079–1102, 1980.
- [112] S. A. Sheikh and S. S. Houry. Confined concrete columns with Stubs. *ACI Structural Journal*, 90(4):414–431, 1993.
- [113] M. Singh and B. Singh. Modified Mohr-Coulomb criterion for non-linear triaxial and polyaxial strength of jointed rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 51:43–52, 2012.
- [114] S. Söckl and B. Menne. *Versuche an wendelbewehrten Stahlbetonsäulen unter exzentrischer Belastung. D.A.f.Stb. H.251*. 1975.
- [115] P. Sokal. Beton skrzepowany w ujęciu polskich norm. In J. Bzówka, editor, *Aktualne badania i analizy z inżynierii lądowej*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, November 2016.
- [116] N. Subramanian. Design of confinement reinforcement for RC columns. *Indian Concrete Journal*, 85(8):25–36, 2011.
- [117] Y. Suenaga and R. Ishimaru. Dynamic analysis on concrete in combined stress (Part 3). *Journal of Architecture and Planning*, 39(220):1–7, 1974.
- [118] Y. Suenaga and R. Ishimaru. Dynamic analysis on concrete in combined stress (Part 4). *Journal of Architecture and Planning*, 39(221):9–16, 1974.
- [119] H. Tresca. Mémoires sur l’écoulement des corps solides. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 59:754, 1859.
- [120] P. A. Vermeer and R. de Borst. Non-associated plasticity for soils, concrete and rock. *HERON*, 29(3):1–64, 1984.
- [121] R. von Mises. Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. *Göttin. Nachr. Math. Phys.*, 1:582–592, 1913.
- [122] T. Waśniewski, Ł. Sowa, and M. Kamińska. Wpływ zbrojenia poprzecznego na nośność i odkształcalność słupów żelbetowych. In *LVI Konferencja Naukowa KILiW PAN oraz KN PZITB*, pages 619–626, Kielce – Krynica, 2010.

- [123] Z. Więckowski. *Zastosowanie metody elementów skończonych w pewnych nieliniowych zagadnieniach mechaniki ciała stałego*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1999.
- [124] K. Willam and E. Warnke. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *Proceedings of the International Association for Bridge and Structural Engineering*, 19:1–30, 1975.
- [125] T. L. Wu, Y. C. Ou, S. Yen-Liang Yin, J. C. Wang, P. H. Wang, and S. H. Ngo. Behavior of oblong and rectangular bridge columns with conventional tie and multi-spiral transverse reinforcement under combined axial and flexural loads. *Journal of the Chinese Institute of Engineers, Transactions of the Chinese Institute of Engineers, Series A*, 36(8):980–993, 2013.
- [126] Q. Xu, J.-Y. Chen, J. Li, and G. Xu. Coupled elasto-plasticity damage constitutive models for concrete. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 14(4):256–267, 2013.
- [127] S. Y. L. Yin, J. C. Wang, and P. H. Wang. Development of multi-spiral confinements in rectangular columns for construction automation. *Journal of the Chinese Institute of Engineers, Transactions of the Chinese Institute of Engineers, Series A*, 2012.
- [128] S. Y.-l. Yin, T.-l. Wu, T. C. Liu, S. A. Sheikh, and R. Wang. Interlocking Spiral Confinement for Rectangular Columns. *Concrete International*, 33(Specimen C):38–45, 2011.
- [129] T. Yu, J. G. Teng, Y. L. Wong, and S. L. Dong. Finite element modeling of confined concrete-I: Drucker-Prager type plasticity model. *Engineering Structures*, 32(3):665–679, 2010.
- [130] T. Yu, J. G. Teng, Y. L. Wong, and S. L. Dong. Finite element modeling of confined concrete-II: Plastic-damage model. *Engineering Structures*, 32(3):680–691, 2010.
- [131] P. Zbiorowa. *Politechnika Lwowska 1844-1945*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1993.
- [132] J. Zhang and J. Li. Investigation into Lubliner yield criterion of concrete for 3D simulation. *Engineering Structures*, 44:122–127, 2012.
- [133] J. Zhang, Z. Zhang, and C. Chen. Yield criterion in plastic-damage models for concrete. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 23(3):220–230, 2010.
- [134] D. Zheng and Q. Li. Micromechanics model for static and dynamic strength of concrete under confinement. *Frontiers of Architecture and Civil Engineering in China*, 2(4):329–335, 2008.
- [135] X. Zhou and Z. Li. Characterizing Rheology of Fresh Short Fiber Reinforced. *Journal of Materials*, 1561(February):28–35, 2005.
- [136] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. The Finite Element Method Fifth edition Volume 1: The basis, Volume 2: Solid mechanics. *The finite element method*, 2000.